

ASTHANA KOLAHALAM

Critically Edited By

THIRUMALAI SREE SAILA SARMA

Government Oriental Manuscripts Library, Madras.

1951

PRICE Rs. 5—0—0

PRINTED AT THE
SOLAR WORKS, MADRAS-1.

1653 1/2

INTRODUCTION

The Government of Madras took up for consideration the question of publication of the various manuscripts in different languages on subjects like Philosophy, Medicine, Science, etc., early in May, 1943. Important Manuscripts Libraries in the Madras Presidency were requested to send a list of unpublished manuscripts with them for favour of being considered by the Government for publication. The Honorary Secretary of the Tanjore Maharaja Serfoji's Sarasvathi Mahal Library, Tanjore, alone complied with this request. This list as well as a similar list of unpublished manuscripts in the Government Oriental Manuscripts Library, Madras, were carefully examined and a tentative selection of manuscripts suitable for publication was made. The Government in their Memorandum No. 34913/48-10, Education, dated 4-4-1949, constituted an Expert Committee with the Curator of the Government Oriental Manuscripts Library, Madras, as the Secretary, for the final selection of manuscripts suitable for printing and for estimating the cost of publication.

The following are the members of the Committee :—

1. Sri T. M. Narayanaswami Pillai, M.A., B.L.
2. „ R. P. Sethu Pillai, B.A., B.L.
3. „ C. M. Ramachandra Chettiar, B.A., B.L.
4. „ R. Krishnamoorthy, (Kalki).
5. Dr. N. Venkataramanayya, M.A., Ph.D.
6. Sri M. Ramanuja Rao Naidu, M.A.
7. „ V. Prabhakara Sastri.
8. „ N. Venkata Rao.
9. „ H. Sesha Ayyangar.
10. „ Masthi Venkatesa Ayengar.
11. „ M. Mariappa Bhat, M.A., L.T.
12. Dr. C. Achyuta Menon, B.A., Ph.D.
13. „ C. Kunhan Raja, M.A., D.Phil.
14. „ A. Sankaran, M.A., Ph.D., L.T.
15. „ P. Rama Sastri.
16. „ S. K. Ramanatha Sastri.
17. Dr. M. Abdul Haq, M.A., D.Phil., (Oxon.)
18. Afzul-ul-Ulama Hakim Khader Ahamed.

19. Sri P. D. Joshi.
20. „ S. Gopalan, B.A , B.L.
21. „ T. Chandrasekharan, M.A , L.T.

With the exception of Sri Masthi Venkatesa Iyengar, Dr. C. Kunhan Raja, the above members continued to be members of the Expert Committee for 1950-51 also to which the following gentlemen were included in Govt. Memo. No. 7297-E/50-3. Edn, dated 19-5-1950 and Govt. Memo. No. 15875-E/50-4. Edn., dated 7-9-1950.

1. Dr. A. Chidambaranath Chettiar, M.A, Ph. D.
2. Sri S. Govindarajulu, B.A , B.L , LL.B., Bar-at-Law,
- 3 Capt. G. Srinivasamoorthy, B.A., B.L., M.B., & C.M.
4. Dr. Muhammed Hussain Nainar, M.A., Ph. D.,
5. Sri T. V. Subba Rao, B.A., B.L.,
6. Principal, College of Indian Medicine, Madras.

The members of the Committee formed into Sub-Committees for the various languages, Sanskrit, Tamil, Telugu, Kannada, Malayalam, Mahrathi and Islamic Languages. They met during the month of May, 1949, at Madras and at Tanjore to examine the manuscripts and make a selection. The recommendations of the Committee were accepted by the Government and they have decided to call these publications as the "MADRAS GOVERNMENT ORIENTAL SERIES," and appointed the Curator, Government Oriental Manuscripts Library, Madras, as the General Editor of the publications.

The following manuscripts were taken up for publication during 1949—50

"A" From the Government Oriental Manuscripts Library, Madras

TAMIL

1. KAPPAL SATTIRAM.
2. ANUBHAVA VAIDYA MURAI.
3. ATTANAKOLAHALAM.
4. UPADESA KANDAM.
5. COLAN PURVA PATTAYAM.
6. KONGA DESA RAJAKKAL
7. SIVAJNANA DIPAM.

TELUGU

1. AUSADA YOGAMULU.
2. VAIDYA NIGHANTU.
3. DHANURVIDYA VILASAMU.
4. YOGA DARSANA VISAYAMU.
5. KHADGA LAKSANA SIROMANI.

SANSKRIT

1. VISANARAYANIYAM.
2. BHARGAVA NADIKA.
3. HARIHARACATURANGAM.
4. BRAHMASUTRAVARTTI MITAKSARA.
5. NYAYASIDDHANTA TATVAMRTAM.

MALAYALAM

1. GARBHA CIKITSA.
2. a. VASTULAKSANAM.
b. SILPAVISAYAM
3. MAHASARAM.
4. KANAKKUSARAM.
5. KRIYAKRAMAM.
6. KANAKKUSARAM—BALAPRABODHAM.

KANNADA

1. LOKOPAKARA.
2. RATTAMATA.
3. ASVASASTRAM.
4. VIVIDHA VAIDYA VISHAYAGALU
5. SANGITARATNAKARA
6. SUPASASTRA.

ISLAMIC LANGUAGES

1. JAMIL—AL—ASHYA.
2. TIBB—E—FARIDI.
3. TAHQIQ—AL—BUHRAN.
4. SAFINAT—AL—NAJAT.

*"B" From the Tanjore Maharaja Serfoji's Sarasvathi Mahal
Library, Tanjore.*

TAMIL

1. SARABENDRAVAIDYA MURAI. (Diabetes).
2. Do. (Eyes).
3. AGASTIYAR
4. KONKANARSARAKKU VAIPPU.
5. TIRUCHITRAMBALAKKOVAIYAR with Padvurai.
6. KALACAKRAM.
7. TALASAMUDRAM.

8. BHARATANATYAM.
9. a. PANDIKELI VILASAM NATAKAM.
b. PURURAVA CAKRAVARTI NATAKAM.
c. MADANA SUNDARA VILASA NATAKAM.
d. PERCY MACQUEEN'S COLLECTION in the Madras University Library on Folklore.
10. RAMAYAN AMMANAI.
11. TAMIL, PADALKAL including Pattinattar Venba and Vannankal.

TELUGU

1. KAMANDAKANITISARAMU.
2. TALADASAPRANAPRADIPIKA.
3. a. RAGHUNATHA NAYAKA ABHYUDAYAMU.
b. RAJAGOPALA VILASAMU
4. RAMAYANAMU by Katta Varadaraju.

MAHRATHI

1. NATYASASTRA SANGRHA.
2. a. BOOK OF KNOWLEDGE.
b. FOLK SONGS.
c. DORA DARUN VENI PADDHATI
d. ASVASA CATULA DUMANI.
3. a. PRATAPASIMHENDRA VIJAYA PRABANDHA.
b. SARABHENDRA THIRTHAVALI
c. LAVANI.
4. DEVENDRA KURAVANJI
5. BHAKTA VILASA.
6. SLOKA BADDHA RAMAYANA.

SANSKRIT

1. ASVASASTRA with Tricolour illustrations.
2. RAJAMRGANKA.
3. CIKITSAMRTASAGARA.
4. AYURVEDAMAHODADHI.
5. GITA GOVINDA ABHINAYA.
6. a. COLACAMPU.
b. SAHENDRA VILASA.
7. DHARMAKUTAM—Sundara Kanda.
8. JATAKASARA.
9. VISNUTATTVANIRNAYA VYAKHYA
10. SANGITA DARPANA
11. BIJAPALLAVA

During 1950, only the Sub-Committees for Tamil, Telugu and Kannada met in the month of July 1950 at Madras. The following books were taken up for publication in the various languages in 1950-51.

TAMIL

- | | |
|------------------------------------|----------|
| 1. DAKSHINAMURTHY-VAIDYA ATTAVANAI | Medicine |
| 2. VISVAMITRAVYAKHYA. | ... " |
| 3. ANUBHAVAVAIDYAM. | ... " |

TELUGU

- | | |
|--------------------------|---------------|
| 1. SAIIVACARASANGRAHAMU. | .. Philosophy |
| 2. AUSADAYOGAMULU. | ... Medicine |
| 3. ABHINAYADARPANAMU. | ... Dance |

SANSKRIT

- | | |
|--------------------------------|--------------|
| 1. AROGYACINTAMANI. | ... Medicine |
| 2. TATVASARA with Ratnasarini. | Philosophy |
| 3. SUTRARTHAMRTA LAHARI. | ... " |

MALAYALAM

- | | |
|-----------------------|---------------|
| 1. ASVACIKITSA. | ... Medicine |
| 2. PALASARASAMUCCAYA. | ... Astrology |

KANNADA

- | | |
|-------------------------|--------------|
| 1. VAIDYA SARA SANGRAHA | ... Medicine |
|-------------------------|--------------|

It is hoped that the publication of most of the important manuscripts will be completed within the next four years.

Some of the manuscripts taken up for publication are represented by single copies in the Library and consequently the mistakes that are found in them could not be corrected by comparing them with other copies. The editors have, however, tried their best to suggest correct readings. The wrong readings are given in round brackets and correct readings have been suggested in square brackets. When different readings are found, they have been given in the footnotes except in the case of a few books in which the correct readings have been given in the footnote or incorporated in the text itself.

The Government of Madras have to be thanked for financing the entire scheme of publication although there is a drive for economy in all the departments. My thanks are due to the members of the Expert Committee who spared no pains in selecting the manuscripts for publication.

I have also to thank the various editors, who are experts in their own field, for readily consenting to edit the manuscripts and see them through the Press. The various Presses that have co-operated in printing the manuscripts in the best manner possible also deserve my thanks for the patience exhibited by them in carrying out the corrections made in the proofs.

The present edition is based on the single palm-leaf manuscript presented to Govt. Oriental Manuscripts Library in 1921-22 by Mr. Sankaravenkataramayyangar of Periyakulam. This Manuscript has been described under R. No. 507. The size of the manuscript is $16\frac{1}{2} \times 1\frac{5}{8}$ inches. This contains 84 pages having 6 lines on a page. This is a treatise on Mathematics calculations in Tamil in this country are of a special nature having separate symbols for various fractions. People knowing these symbols are very few. Hence I had much difficulty in getting this book edited by a competent person, who knows both ancient modern methods of calculation. The same difficulty was experienced by me, in getting a printer. Only two presses were prepared to take up this work as it involved the special casting of a number of symbols peculiar to Tamil Arithmetic.

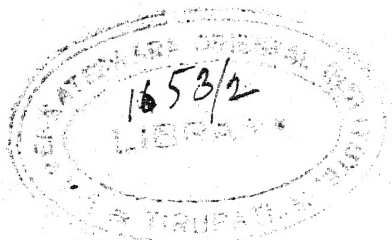
The Solar Works, though they refused to take up the work in the beginning, finally consented to print the work at a comparatively moderate rate, and have completed the work in the best manner possible.

The Editor has added his own explanation and has drawn various figures that are printed in this work. The Original Text as found in the manuscript is printed with a slight indent, having a small margin on the left. It is regretted that the Editor was not able to write an introduction to the work due to various causes.

Reference is to be made to the good work done by Sri V. R. Kalyanasundaram, Pandit of this Library for going through the proof.

Govt. Oriental Manuscripts }
Library, Madras.

T. CHANDRASEKHARAN,
General Editor,
Madras Govt. Oriental Series.



ஆஸ்தான கோலாஹஸம்

முன்னாற்கணக்கால் மொழிந்தவை தன்னை

என்னால் திவிளியென்ற மரியாதி

சின்னாற்கணக்காய்த்திரட்டி யக்கணக்கும்

நன்னால் வர்முன் நயந்துறைப்பேனே “(1)”

நாலாகலை நியுணர் மிக்கான குணசீலர் நல்லறிவுள்ளோர்கள்

மேலான பெக்கணக்கும் தான் வகையுள்ளதெல்லாம் விளம்பிரீ

[தென்ன

பாலானவாரிதனிற் பிறந்த மிர்தம்போலும் பண்பாகுமாள்தான

கோலாகலமென்னும் பேர்வகுத்து மாப்பாரதியக் கூறினேனே (2)

கூடலில் நாகன் குணம் ஓர்வளித்த

ஆவர்தாரின னுவிளிப்பெருமாள்,

பாடலைப் பாணர்பாதம் பணிவோன்

நாடவர் நகைக்க நயந்துறைப்பேனே (3)

ஆஸ்தான கோலாகலச் சுருக்கம் வருமாறு:—

“எண்ணும் எழுத்துங் கண்ணெனத்தகும்; ; என்றவ்வை சொன்னாற் போலும்; “பொன்னென்று பணிபல; வென்றார் போலும் சகலமான கணக்கும் எண்சுவடி என்னுமதாய்ப் பள்ளிக்கூடம் விட்டுக்கணக்கு எழுதப் போன உடனே எண்சுவடி மறந்து தடுமாறுகிற பேரும் உண்டு. யுத்திகாரன் நினை விட்டுக் கொண்டு கேட்ட வகைக்கெல்லாம் தடுமாற்ற மில்லாமல் சொல்லுகிற பேரு முண்டு.

இந்தச் சுருக்கம் கத்திருந்து வகைவந்தால் யுத்திகாரனுக்கு எந்த உரையிலே எழுதினாலும் நாலு கணக்குப் பிள்ளைகளுக்கு முன் கேட்டவகை சரிக் கட்டிச் சொல்லும் பேருண்டாக்கி வைக்குமாகையாலே இந்தச் சுருக்கம் அங்கத்தால் (எண்களால்) மந்தகை இருங்கிற பேரும், யுத்திகாரனாக இருக்கிறபேரும், கேட்ட வகை சொல்லவல்லவகை இருப்பான். யுத்திக் காரராயிருக்கிற பேர் கற்றால், பொற்பூவில் வாஸனை பிறந்தார்ப்போல் எண்ணப்பட்டதாக, ஆயிரத்திலொருவனென்று சொல்லியபாயிருக்கும். மத்த அதிகாரம் விரிவிட்டுச் சொல்லி வைத்தபடியினாலே ஒன்றும் வந்து ஒன்றும் வராமலுமாக விருக்கும். (என்றால் உதாரணத்தில் வந்தவைகள் சிலவும், வராதவைகள் சிலவுமாக இருக்குமாகையால் முக்கியமாய்க் கவனிக்கவேண்டிய வகைகள் யாவும் பொது வழியிலேயே என்பது அவசியம் உணர்த்தக்கதாம்)

அந்தக் கணக்கதிகாரங்களை குருவாக எண்ணிச் சுருக்கமாக எந்த வகைக் கணக்கிலும் குறுக்கமாக அளக்கப்பட்டதும், எண்ணிக் கைப்பட்டதும், உள்வட்டம், பிரவட்டம், முத்துகை, விகற்பக்கடைதலை, விலப்பூட்டு, சேவித் தான் கணக்கு, நிலத்தீர்வை, பணவரிசை, நெல் வரிசை, கொள்ளுகிற வகை, விற்கிறவகை; நிலமளவு, காலளவு, (காலஅளவு) குளவெட்டு, மரக்காலவியன், நெல்லுக்குத்த-விடுகின்றது, ஐவகை விகற்பம், ஏ(ளு)ழுவகை விகற்பம், ஒன்பது துகை விகற்பம், பதினொரு தொகை விகற்பம் அப்பாலுமிப்படிப் பேரிட்டு வந்த விகற்ப (விகற்பம் என்றால் வேற்றுமை என்பது பொருள்) க கணக் கெல்லாம் சுருக்கமாகச் சொல்லுகிறேன்.

அது எப்படி யென்னில் :— விரித்துக்காட்டல் :— முத்துகையாக வந்த வகைக்கெல்லாம் நடுவுங்கடையும் பெருக்கி முதலுக்குக் கொடுத்து ஒரு தனிப் பேர் சொல்லுகிற இனமுண்டு. (1).

கடைதலை(யி)ல் முட்டாக முதலுங்கடையும் பெருக்கி நடுவுக்குக் கொடுத்து ஒரு தனிப்பேர் சொல்லுகிற இனமுண்டு. (2).

முத்து கையில் வந்த இனம் கடைசியில் வந்தால் நடுவுங்கடையும் பெருக்கி முதலுக்குக் கொடுத்தால் அதுவே தீர்வை (3).

நடுவும் கடைசியில் முதலுங்கடையும் பெருக்கி நடுவுக்குக் கொடுத்து ஒருவன் (ஒன்றின்) பேர் சொல்லுவது. (4).

அய்ந்துகை விகற்பத்துக்கு :— முன்(ரி)னரையைப் பெருக்கி நிறுத்திப் பின்னரையு மந்தப்படியே பெருக்கி இதை முன் துகைத்தீருவைப் போல் நடுவுங்கடையும் பெருக்கிக் கண்டது, நிருத்தின துகைக்குக் குறித்தது அதுவே (அதனீவையே) தீருவையாகச் சொல்லவும் (5).

இப்படிப் போலவே :— ஐந்துகை, ஏழுதுகை, ஒன்பது துகை பதினொரு துகை, (ஆக) வந்த (துக்கெல்லாம்) தற்கெல்லாம் இப்படிக்கண்டு சொல்லவும்.

இங்குள்ள சொல்லப்பட்ட கணக்கெல்லாம் தீபரமாகச் சொல்லுகிறதற்கு வகை விபரம்.

குணமாராட்டமாக வருகிற கணக்கும் பரத்திலே, இனத்திலே விரித்துக் காட்டல் :— திவாகரம், உருச்சொலக்கவிச் சொன்னாப்போலும், அப்படிக்கேட்ட கணக்கெல்லாம் சுருக்கமாகச் சொல்ல பந்துக்கட்டு பெருக்குகிற வகையறிய நினவு :—

யுருயு குழி யெத்தனை யென்றால் குழி-ள-ஆமே. அதற்குஸ்தானம்-யு-ரு (க்கு) ஸ்தானம் க. யு; ஆ (ஆகஸ்தானம்) உ. மத்தய-யு-ருத்தானம் உ. ஆத்தானம்-ச-ரு-க-தள்ளி நின்ற ஸ்தானம் ஈ-(3); ஆகையால் நூறுக்குத்

க-ய-ள-ந்.ய-ந்-ள-ந்-ய-ள-ந்-கோடி. - ய் கோடி - ள் கோடி-ந் கோடி-ய-ந், கோடி-ள-ந் கோடி. ய-ள-ந் கோடி-மகா கோடி.

இதற்கின்னும் விவரணம் :—

இந்த இந்த ஸ்தான துச்சு	எழுத்தினால் பெயர்கள்	பூர்வீகர் உபயோகித்த தமிழ் எண்களின் பெயர்களுக்குரிய குறிப்பு (அடையாளம்)	தற்காலத்தில் உப யோகித்து வரும் பெயர்களுக்குக் குறிப்பு (அடையாளம்)
1 ரு	ஒன்று	க	1
2 ரு	பத்து	ஐ	10
3 ரு	நூறு	நா	100
4 ரு	ஆயிரம்	சூ	1000
5 ரு	பதினாயிரம்	ஐசூ	10000
6 ரு	லக்ஷம்	நாசூ	100000
7 ரு	பத்து லக்ஷம்	(யொசூ = சூசூ)	1000000
8 ரு	கோடி	(கோடி = ஐசூசூ = நாசூசூ)	10000000
9 ரு	பத்து கோடி	(யெ கோடி = யொநாசூ) =	100000000
10 ரு	நூறு கோடி	(நா கோடி = நானாசூ)	1000000000
11 ரு	ஆயிரக் கோடி	சூசூக் கோடி	10000000000
12 ரு	பதினாயிரக் கோடி	ஐசூசூக் கோடி	100000000000
13 ரு	நூறுபிறக் கோடி	நாசூசூக் கோடி	1000000000000
14 ரு	பத்து நூறு பிறக் கோடி	யொசூசூக் கோடி	10000000000000
15 ரு	மகா கோடி	$\left\{ \begin{array}{l} \text{(கோடி கோடி)} \\ = \text{(நாசூசூக் கோடி)} \\ = \text{(ஐசூசூக் கோடி)} \end{array} \right\}$	100000000000000

ஆதலால் கோடிக்குக் கோடி என்பது (5).

விட்டேறு லக்கமாக வந்தாலும், மாறுபாகமாகச் சொல்லி வந்தாலும், கணக்குச் சொல்லுகிறதற்கு வகை :—

இருபத்துக்கும்-உாறும் (20 × 200) குளி (குழி) பெத்தனை யென்றால் :—
உாறு ஸ்தானம் உ-உயி-உா-ஆகத்தானம் ஈ (மூன்று). மத்தய உயி (20)ம்
ரெண்டும் மாற (பெருக்க) சயி (40) இதை மூன்று (ஸ்தானம்) மட்டும்
நடத்த சயி - சா - சந் (40 - 400 - 4000) = (20 × 200 = 4000) ஆதலால்
உயி ரு உாறு குழி எத்தனை என்றால் சந் என்பது.

சா.ரு.சாறு குழி எத்தனை யென்றால் சாறு ஸ்தானம் (முன்போல்)-ச-சயி-சா
ஆக ஸ்தானம் ஈ. மத்தய-சா-று ஸ்தானம் ஈ. ஆகஸ்தானம் சு (6) ரு
ஆறுக்கு (சு) ஒன்று தள்ளி நின்ற ஸ்தானம் ரு-ஐந்து-ஸ்தானம் (ரு) ஐந்து
மட்டும் நடத்த ∴ [(சருசரு=யசு) = (4 × 4 = 16);] ∴

யசு-நாசயி-ந்நா-யசு-நாசயி (16-160-1600-16000-160000) ஆதலால்
சாறு சாறு குழி நாசயி (லக்ஷத்தறுப தாயிரம்) (நூத்தறுபதாயிரம்) என்பது.

சாறு ஸ்ந்ரு குழி எத்தனை யென்றால்-சா று த்தானம் ச-சயி-சா ஆகத்
தானம் ஈ. மத்த-சுந் ரும் சரும் மாற-உயிசந் (4 × 6000 = 24000) இதை
ஈ மட்டும் நடத்த (ஏற்படும் ஸ்தானங்கள்) உயிசந் - உாசயிசந்-உயிசாந் (24000-
240000 — 2400000) ஆதலால் சாறும் ஸ்ந்ரு குழி (உயிசாந் = 24,00,000)
இருபத்து ஒன்கு லக்ஷம் (400 × 6000 = 2400000) யென்பது.

உயிசுரு ஈயாந்ரு குழி (அதாவது இருபதாயிரத்துக்கும் மூப்பது லக்ஷத்
துக்கும் = 20000 × 3000000) குழி எத்தனை யென்றால் உயிசுருத்தானம் —
உ-உயி-உா-உந்-உயி ஆகத்தானம் ரு (= 5) என்று வைத்து ஈயாந் ரு உரு
மாற-சுயிந் = (60,00,000) இதை-ரு-மட்டும் நடத்த (க்கண்டது) சுயிந்-
சுகோடி-, சுயிகோடி - சுகோடி - சுந்க்கோடி = (6000000 - 60000000-
600000000-6000000000 — 60000000000) = (20,000 × 30,00,000) =
60000000000 ஆதலால் உயிசுரு ஈ யாந்ரு குழி ஸ்ந்க்கோடி (இருபத்தா
யிரத்துக்கும், மூப்பது லக்ஷத்துக்கும் குழி, ஆறுயிரக் கோடி) என்பது.
[இதற்கு கிவ்விதமுஞ் செய்யலாம் :— உயிசுருத்தானம் = 5 இவ்விதமே
ஈயாந்ருத்தானம் ஈ-ஈயி-ஈா-ஈந்-ஈயி-ஈாந்-ஈயாந் = (3-30 - 300 -
3000 - 30000 - 300000 - 3000000) இதற்குத்தானம் = 7 = (எ) இந்த 7ம்
ஷெ 5ம் சேர்க்க 12இதில் (1) தள்ள (11) தானம். ஷெ 2ம் 3ம் பெருக்க
(2 × 3) = 6 இந்த (சு)ரு ஷெ (ருசு=11)த் தானம் மட்டும் நடத்த ஷெ போல் :—

சு = (ஆறு)

சுயி = (ஆறுபது)

சுா = (ஆறுநூறு)

சுந் = (ஆறுயிரம்)

சுயிந் = (ஆறுவதாயிரம்)

சுாந் = (ஆறுலக்ஷம்)

சுயிந் = சுயி லக்ஷம்

சுாந் = சு கோடி

சுயிந் = சுயி கோடி

$$\begin{aligned} \text{சுரானாந்} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{சுர} \\ \text{கோடி} \end{array} \right\} \\ \text{சுயிரானாந்} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{சுயி} \\ \text{கோடி} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

என்றுஞ் சுலபமாகத்தானங் கணிக்கலாம்.]

சுயாந்ருசயாந் ரு குழி யெத்தனை என்றால் [அறுபது லக்ஷத்துக்கும் நாற்பது லக்ஷத்துக்கும் = (6000000 × 4000000) குழி யெவ்வள வெனில்]

சயாந் ரு த்தானம் - ச - சய - சா - சந் - சயந் - சாந்
சயாந் - ஆகஸ்தானம் - எ - (ஏழு—7) நிருத்தி, மத்தய சுயாந் ருச
றும் மார உ கோடியே சயாந்-இதை (தானம்) [எ] (ஏழு) மட்டும் நடத்த (ஏர்ப்
படுவது) — உ கோடியே சயாந்₁ - உயச கோடி₂ - உாசய கோடி₃ - உந்சா
கோடி₄ - உயசந் கோடி₅ - உாசயந் கோடி₆ - உயசாந் கோடி₇
(ஒ 6000000 × 4 = 24000000, இரண்டுகோடியே நாற்பது லக்ஷம்
இதை ஸ்தானம் ஏழுமட்டும் நடத்தும் விதம் - 24000000; 240000000;
2400000000; 24000000000; — 240000000000; 2400000000000 —
24000000000000) இருபத்து நான்கு நூறுபிரக்கோடி ஆதலால் சுயாந்ரு
சயாந்ரு (அறுபது லக்ஷத்துக்கும், நாற்பது லக்ஷத்துக்கும்) குழியெத்தனை
யென்றால் உயசாந் கோடி (6000000 × 4000000) = (24000000000000)
— (இருபத்துநான்கு நூறுபிரக்கோடி) என்பது.—

இனிச் சில்வானம் வந்தால் சீக்கிரம் பெருக்கிச் சொல்ல வகை :—

கவனிக்கவேண்டிய இனப்பாசுபாடுகளிங்கு :—

குறிப்பு :— (ரு) = க்கு என்றாகும், இனு = இனம் என்றாகும் —
இனம் என்னும் ஸ்தானத்தில் (இனு) என்றே மூலச்சுவடியில் காணப்படு
கின்றது.

யரு இனம் = க₁; எஇரு இனம் = ந₂; நரு இனம் = இ₃; உஇரு இனம்
= வ₄; கவரு இனம் = ப₅; இபரு இனம் = ய₆

[இங்கென்ன விசேஷமென்றால் இனிசொல்லப்போகும் விஷயம் பின்ன
ருபத்தில். ஆகையால் பத்தை ஒன்றாக பாவனைசெய்து மேலே சொல்லப்
பட்ட இனவரிசைகளைக் கவனிக்குமளவில் — பொதுவாகப்பத்தை (யிஐ)
ஆதாரமாக எடுத்துக்கொண்டால் :—

	ஆதார என்களுக் குறிய இனம்	பின்னத்தில்	தசம பின்னத்தில் (தசாம்ச பின்னத்தில்)
1	யரு = (10க்கு)	(க = 1)	(10 ÷ 10) = 1,
2	எஇரு = (7½க்கு)	(ந = ¾)	(7½ ÷ 10) = 0.75,
3	நரு = (5க்கு)	(இ = ½)	(5 ÷ 10) = 0.5,
4	உஇரு = (2½க்கு)	(வ = ¼)	(2½ ÷ 10) = 0.25,
5	கவரு = (1¼க்கு)	(ப = ⅓)	(1¼ ÷ 10) = 0.125,
6	இபரு = (⅔க்கு)	(ய = ⅙)	(⅔ ÷ 10) = ⅙ 0.0625,

இப்படி யேற்படுவதால் இதன் விசேஷங்களை (தசாம்சகணித சம்பந்தமாக நம்பூர்வீகர்கள் கணிதத்தில் எண்ணிவந்த விசேஷநிர்ணயங்களுடைய கருத்துக்களை) முன்னுரையில் நன்கு காண்க] என்பது.

இடைவெளித்தானம், மூலம் கனப்படுத்தல் கனத்தை மூலப்படுத்தல் இந்த இரண்டு வகைக்கும் முன்னிது பின்னிதாம், பின்னிது முன்னிதாம் கொள்ளலாம். விபரம் (ஒன்று).—

க. வது: வது = $(1 \times \frac{1}{320} = \frac{1}{320})$; டி. வது: சி = $(10 \times \frac{1}{320} = \frac{10}{320} = \frac{1}{32})$;
 ஈ. வது: வய = $(100 \times \frac{1}{320} = \frac{5}{16})$;

௧. $\bar{v} : \bar{v} = (1 \times \frac{1}{160} = \frac{1}{160})$; $\bar{w} : \bar{w} = (10 \times \frac{1}{160} = \frac{1}{16})$;
 ௩. $\bar{v} : \bar{w} = (100 \times \frac{1}{160} = \frac{100}{160} = \frac{5}{8})$;

இவ்விதம் பயிற்சியின் காரணமாக மற்றும் கீழ்வருவன யாவும்
கவனிக்க :—

ரிஷத-பக்ஷி-ஷதநி-உ-பூ-கவ - உஷத - ...ரி - ... இப - உரி நி- கஷபூ-
 உரிஷத - கிஉரி - உநி - சவஉஇ - சஷத - வகி - ஷத - ய - கிவப-நூபூ-சரிஷதவ
 பக்ஷி-நி-வநி- சூ-வபூ நூ-சூஷதவநி-ரி-சய-சூரிவநி-

சுவபூ.சுபிஷத்.வகிபுரி.சஇஸ். (ப-இ-நு) (பி-க-ய) - ஸி = கஇ = மநு -
கி-உ உய-ய-இபூ-சுவ; பூ கவ-யஉஇ; ஸி-கநூபூ-மயுந-

உஇ-உயிரு; வய-நடு நடுகவ; வடு-நடு நடுஇ; வந-சுவடு-சயநடு; இ-
நடு-நடு; இப-நடுஇடு-நடுகவ; இடு-சுவ-சயஉஇ; இந-சுநடு-சயஅந --

ஜ-எஇ-எயெரு; ஜய - அபு-அயகவ-ஜபு-அஜ - அயஎஇ - ஜந்-கவபு-
 கயந்-க-ய-ந-ய-ந்-ய-ந் - யாந் - கோடி - யக்கோடி - நாகோடி - நக்கோடி -
 யந் கோடி-நந் கோடி - யாந் கோடி - மகாகோடி.

[இவ்விதம் பின்ன வாய்ப்பாடுகளைச் சுருக்கிக் கர்த்தா கூறியிருக்கிறார். கிரந்தம் பார்க்கும் தோஷம் எழுதும் தோஷம் இவைகளை முன்னிட்டோ அல்லது எந்தக்காரணத்தாலோ இவைகள் ஒழுங்குபெற வரிசைப்படி வரவில்லை இவைகளுடைய சர்வ சந்தேக நிவாரணத்திற்காக முந்திரி முதற்கொண்டு சிலமுக்கியமான (முன்னுறையிற் கண்ட) பின்ன வாய்ப்பாடுகளை மனப்பாடம்

செய்வதற்காகவே இப்பட்டி தயார்செய்தது. இதில் கண்ட பெயர் உச்சரிப்பு (ஸம்க்ஞை) குறிப்புகள் இவ்வகைக்கொண்டு பெரிய கெட்டி எண்கவடி-முதலியவைகளில் உள்ள முந்திரி முதலிய பின்ன வாய்ப்பாடுகளைக் கொண்டும்; பெருகுழி சிறுகுழி முதலிய வாய்ப்பாடுகளைக்கொண்டும்; (மனப்பாடம் செய்து) வெகு சுலபமாகக் கணிக்க இயலும்.

மேலும் இந்த கணித புத்தகத்தில் கீழ்வாய் லக்கங்களும் சிலவிடங்களில் வருகிறது. சிறுகுழிக்கணிதத்தில் அவசியம் கீழ்வாய் லக்கங்கள் வந்தே தீரும். ஆகையாலந்த பின்னங்களின் தமிழ் பெயர்கள் குறிப்புகள் இதற்குச் சரியான தசாம்சபின்னங்கள் அடங்கிய பட்டி விவரம்.

வரிசை நா.	தமிழில் பெயர் கள் (அல்லது) உச்சரிப்புகள்.	குறிகள்	1க்குறிய அம் சங்கள் (ஸமான பின்னம்)	தசாம்ச பின்னம்
1	முந்திரி	(ஷ)	(1/320)	0.003125,
2	அரைக்காணி	(ட)	(1/160)	0.00625,
3	காணி	(ஶ)	(1/80)	0.0125,
4	அரைமா	(= சு)	(1/40)	0.025,
5	முக்காணி	(சுஜ = கூ)	(3/80)	0.0375,
6	ஒருமா	ப	(1/20)	0.050 = (0.05),
7	வீசம்	(பஜ = ய)	(1/16)	0.0625,
8	ரண்டுமா	ஐ	(1/10) = (0.1)	0.100 = (0.1)
9	அரைக்கால்	(ஹ = ஓ)	(1/8)	0.125,
10	மும்மா	டி	(3/20)	0.15
11	மூவீசம்	(ஸ)	(3/16)	0.1875,
12	நாலுமா	சு	(1/5) = (.2)	0.2
13	கால்	வ	(1/4)	0.25,
14	அரை	(ஜ = இ)	(1/2)	0.5,
15	முக்கால்	(ஐ = று)	(3/4)	0.75
16	ஒன்று	க	1	1.00

(17) முக்காணி பரைக்காணி = சுஜ = கூ = ($\frac{7}{160}$) = 0.04375

கீழ்வாய் இலக்கங்களின் விவர மாவன :—

அதாவது

$$(1) \text{ கீ } = \text{கீழ் முக்கால்} = (3\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}) = (12\frac{3}{8}),$$

$$(2) \text{ கீ இ } = \text{கீழ் அரை} = (3\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = (1\frac{1}{4}),$$

$$(3) \text{ கீ வ } = \text{கீழ் கால்} = (3\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}) = (1\frac{1}{8}),$$

$$(4) \text{ கீ ஒ } = \text{கீழ் அரிக்கால்} = (3\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}) = (2\frac{1}{8}),$$

$$(5) \text{ கீ ய } = \text{கீழ் வீசம் அல்லது கீழ்முகாணி} = \frac{1}{320 \times 16}$$

$$(6) \text{ கீ வது } = \text{கீழ் முந்திரி} = 3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = (320)^2$$

$$\text{கீ ய } = \frac{1}{320} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{5120};$$

$$\text{கீ வது } = \frac{1}{(320)^2} = \left\{ \frac{1}{320 \times 320} \right\} = \left\{ \frac{1}{102400} \right\} = .000009765625 ;$$

என்ற இவ்வாறு அதாவது (கீழ் முக்கால் என்றால்) (கீ) என்றால் (முந்திரியை இங்கு ஆதாரமாக வைத்து) முந்திரிக்கு முக்கால் எவ்வளவு, என்றும் (கீ இ) என்றால் முந்திரிக்கு அரைப்பங் கெவ்வளவு, (கீ ய) என்றால் முந்திரிக்கு பதினாய்வில் ஓர் பங்கென்ன என்றும், (கீ வது) என்றால் முந்திரிக்கு முந்திரி அதாவது 320ல் 1 பங்குக்கு 320ல் 1 பங்கென்ன என்று இவ்வாறெல்லாம் கேட்ட வற்றிற்கு சொல்லக்கூடிய பதிலாம். இது சந்தேகங்கட்கு மேலே காட்டிய விதி உதாரணங்களாலும், முன்னுறையில் கண்ட பட்டியாலும், இன்னு மேற்படும் சகல சந்தேகமும் நீங்கும். அப்பாலும் கோடி முதல் மகா அற்புதம் மட்டும் வருகிற துறைக்குக் கவி :—

நாக்கோடி. சிங்கம் நல்விந்தம் நாப்பதுமம், மத கொரச்சு முத்திரத்தின் தாமரைவேர், சதவெள்ளம், பிரளயமாம், மெய்த்ததொரை ரு) யோகினை கற்ப நிகற்பம், கடிமகாநதன் பனைபுற [று] பலம், அற்புத மென்றோது (4):—

என்று சொல்லும். இதற்கு ஒன்றின் பேரிலே மகா மகா வென்று— மகா-ஸ்தானம் வரும். ஒன்று முதல் மகா அற்புதம் மட்டும் வருகிற துறைக்கு இனம்-க-ய-ந-ய-ந-ய-ந-ய-ந-ய-ஆ கத்தானம் எ-(ஏழு). அப்பால் கோடி முதல் மகா அற்புதம் மட்டும் வருகிற துறைக்கு-இனு உயி-அ-ஆ-இனு-உ-உ-இ-இ-இந்தப்படி அதிகாரக்காரர் அருளிச்செய்தது.

எஇரு அயஅரு குழி பெருக்க வென்றால் எஇரு. இனம்-ஆ-($\frac{3}{4}$) யென்று வைத்துக் கொண்டு அயஅ-ரு-ஆ-று பெருக்க-க-ய-இதைப் (யல்) பத்தில் பெருக்க-க-ய-கூ-கூ; ஆ-கூ-கூ-ய-(660); ஆதலால் எஇ=($=7\frac{1}{2}$) ரு-அயஅ (= 88) ரு குழி ($7\frac{1}{2} \times 88 = 616 + 44 = 660$) = (கூ-கூ-ய)-என்பது. யஎஇ ($17\frac{1}{2}$) ரு அயஅ (88)-ரு குழி எத்தனை யென்றால் யஎஇ இனம் ($1\frac{3}{4}$) ச-ஆ-என்று வைத்துக்கொண்டு அயஅ (88) ரு ச-ஆ ($1\frac{3}{4}$) ரும்பாற ஈருயச (154); இதனை பத்தில் (யல்) படுத்த சூருசய ($1540 = 154 \times 10$). என்பது.

யிரு சயிசு இஹு குழி பெத்தனை யென்றல்-யிரு இனம்-கஇ—என்று வைத்துக்கொண்டு சயிசு இஹு ($46\frac{5}{8}$) ரு க இ ($1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$) ரு மாற-சுமிகு ஞாநு— இதை யி (10)ல் படுத்த கூராகுக வஹு ($= 699\frac{3}{8}$) என்பது.

யிசு ரு சயிசு இஹு குழி பெத்தனை யென்றல் சயிசு இஹு ($46\frac{5}{8}$)லில் பாதி உயிந வய ($23\frac{5}{16}$); இதை சயிசு இஹு ($46\frac{5}{8}$) உடனே துக்ககட்ட சுமிகு ஞாநு- ($699\frac{3}{8}$) இதை பத்தில் (10)ல் (10-ல்) படுத்த கூராகுக வஹு ($699\frac{3}{8}$); மற்ற ஒன்றுக்கு சயிசு இஹு ($46\frac{5}{8}$) துக்ககட்டனே கூட்ட ளாசயிசு- (746) ஆதலால் யிசு (16) ரு சயிசு இஹு ($46\frac{5}{8}$) ரு குழி—ளாசயிசு (746) பென்பது.

யிக (19) ரு சயிசு இஹு ($46\frac{5}{8}$) ரு குழி பெத்தனை யென்றல்—யிக (19)க்கு மேல் ஒண்ணு கூட்டினால் உயி (20); இதுக்கு இனம்-உ (2); சயிசு இஹு ($46\frac{5}{8}$) ரு உ (2) ரு மாற கயிந வ ($93\frac{1}{4}$). இதை பத்தி (10)ல் படுத்த கூராகு உ இ ($932\frac{1}{2}$), அதில் முன் பத்தொன்பதுக்கு மேல் க (1) கூட்டின துக்கு-சயிசு இஹு ($46\frac{5}{8}$) போக நீக்கி ஆ அயிரு ஞா ($885\frac{7}{8}$) குழி என்பது.

யிகஇரு சயிசுஇஹு (அதாவது $19\frac{1}{2} \times 46\frac{5}{8}$) குழி எத்தனை யென்றல் ($19\frac{1}{2}$) -யிகஇரு மேல்-இ- ($\frac{1}{2}$) கூட்டினால் உயி (20) (இகற்கினம்) = உ (2); சயிசு இஹு ($46\frac{5}{8}$) ரு உ (2) ரு மாற கயிந வ ($93\frac{1}{4}$); இதை பத்தி (10)ல் படுத்த கூராகு உ இ ($932\frac{1}{2}$) இதில் முன் பத்தொன்பதனுக்கு மேல் கூட்டின இ ($\frac{1}{2}$) ரு உயிந வய ($23\frac{5}{16}$) தள்ளி நீக்கி கூராகு னு- ($909\frac{3}{16}$) குழி என்பது.

இந்த வகையை நன்றாயிப்படி பார்த்துச் சொல்ல வந்தால் சபையிலே கூட்டக்களிக்க கணக்குப் பின்னை கெட்டிக்கார னென்று பேராவான்.

யின்னஞ் சில்வானங்கூட்டி பெருக்குகிற வகை :—

யி உ இ ($12\frac{1}{2}$) ரு ஈசுயி (160) ரு குளி பெத்தனை யென்றல் யிஉஇ ($12\frac{1}{2}$) ரு இனம்—கயி ($1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$); யிதனுடனே ஈசுயி (160) மாற-உா (200) இதை யி=10)ல் படுத்த உசு= (2000); ஆதலால் யிஉ இ ($12\frac{1}{2}$) ரு ஈசுயி (160) ருக் குளி உசு (2000); என்பது.

யிக ஞா (ஹ) ஹு ($11\frac{7}{8}$) ரு-அயி- (180) ரு குழி எத்தனை யென்றல்— யிகஞா (ஹ) ஹு ($11\frac{7}{8}$) ரு இனம் க னு- ($1\frac{3}{16}$) இதனுடனே-அயி (180) யை மாற உாயிநு ($213\frac{3}{4}$) இதை-யி (10)ல் படுத்த உசுளாகு இ ($2137\frac{1}{2}$) $= (11\frac{7}{8} \times 180) = (11.875 \times 180)$; என்பது.

யிக இ ($11\frac{1}{2}$) ரு-உாசயி (240) ரு-குழி எத்தனை யென்றல் :— யிகஇ ($11\frac{1}{2}$) ரு இனம்-கரி = (ஒன்றும்மும்மாவும்) [அகாவது ($11\frac{1}{2} = 11.5$) $\times \frac{1}{10} = 1.15$]; இங்கு மும்மா = ரி = $\frac{3}{20} = 0.15$; $\therefore 11\frac{1}{2}$ ரு இனம் $1.15 =$ கரி என்றபடி] ($1 + \frac{3}{20} =$ கரி). இதனுடனே உாசயி (240) மாற உாசயிசு (276) இதை யி (10)ல் படுத்த உசுளாகு (2760) குழி-என்பது.

ய் இ ஓ (10⁵/₈) ரு சுயச ரு குழி எக் தனை யென்றால்:—ய் இ ஓ (10⁵/₈) ரு இனம் = சுய (1¹/₁₆ = 1.0625); இ தனுடனே-சுயச=(64) மாற-சுயஅ (68) இதை-ய் (10)ல் ப தெக்-கூறாய் (680) ஆதலால்-சுயச (64) ரு ய் இஓ (10⁵/₈) ருக்குழி-கூறாய் (680) யென்று சொல்லவும்.

இனீக் கூட்டிக் களித்து பெருக்கிச் சொல்லுகூற விபரம். விரித்துக் காட்டல்:—ய்ரு தந் (15¹/₁₆) ரு ய்ரு தந் (15¹/₁₆) ருக் குழி யெத்கனை என்றால், ய் (10) ரு ய் (10) ரு ஈ (100); ய்ரு (10 × 5) = ய்ரு (50), ய்.த.எஇ = (10 × ³/₄ = 7¹/₂); ஆக ய்ருய இ (157¹/₂); ய்.ந்: க துடி = (10 × ³/₁₆ = 1⁷/₈) ய்ருய வடி (159³/₈); ய்.ந்: ய்ரு (10 × 5 = 50); உாக வடி (209³/₈); ய்.த.எஇ = (10 × ³/₄ = 7¹/₂) ய்ரு கூட்ட-உாய்ச துடி (216⁷/₈); ய்.ந்: க துடி (10 × ³/₁₆ = 1⁷/₈) ஆ உாய்ச துடி (218³/₄);— ய்ரு-உய்ரு (5 × 5 = 25); ஆ உாய்சய்ரு துடி (242³/₄). ய்.த.ந்.த (5 × ³/₄ = 3³/₄) ஆ உாய்சய்ரு இ (247¹/₂), ய்ரு.தந் = (5 × ³/₁₆ = 1⁵/₈) ஆ உாய்சய்ருய்ரு = (248⁷/₈); ய்ரு (த) ய்ரு (5 × ³/₄ = 3³/₄) ஆ உாய்சய்ருய்ரு (252³/₈); ய்ரு-தந் (5 × ³/₁₆ = 1⁵/₈) ஆ உாய்சய்ருய்ரு (253¹/₈);— த ரு த: இய = (³/₄ × ³/₄ = ⁹/₁₆) ஆ உாய்சய்ருய்ரு (253¹/₁₆); தந்-செவது = [³/₄ × ³/₁₆ = ⁹/₆₄ = 0.140625] = ¹/₁₆ + ³/₈₀ + ¹/₃₂₀] அதாவது முக்காலுக்கு மூன்று யிசம் எவ்வளவு பரிமாணம் என்றால் (முக்கால் × மூன்றுயிசம் = [(ஆருமா = 3 = ¹/₁₆ = 0.1) + (முக்காணி = சுய = ³/₈₀ = 0.0375) + (முத்திரி = வது = ¹/₃₂₀ = 0.003125)] ∴ யெ.தந் = (³/₄ × ³/₁₆) = (செவது) = ¹/₁₆ + ³/₈₀ + ¹/₃₂₀ = ⁹/₆₄ = (இருமா முக்காணி முத்திரி) ஆ உாய்சய்ருய்ருய்ரு = (253 + ³/₄ + ¹/₂₀ + ¹/₁₆ + ¹/₃₂₀ = 253 + { $\frac{(240+16+8+1)}{320} = \frac{265}{320} = \frac{53}{64}$ } அல்லது இதற்குச் சமம் = { 253 + $\frac{11}{16}$ + $\frac{9}{64}$ } = { 253 + ($\frac{44+9}{64} = \frac{53}{64}$) } அதாவது இருநூத்தைம்பத்து மூன்றே முக்காலே பொருமா முக்காணி முத்திரி-தந் - செவது (மூன் போலவே மறுபடி. $\frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$). ஆ உாய்சய்ரு துடி = [253 + $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{80} + \frac{1}{320}$ = 253 + ($\frac{120 + 32 + 2 + 1}{160} = \frac{155}{160}$) = (253³¹/₃₂); ய்ரு ரு ய்ரு-சு ய்ரு வது கைவ = ($\frac{3}{16} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{1280} = \frac{145}{1280}$ = $\frac{9}{256}$ ∴ $\frac{3}{16} \times \frac{3}{16} = (\frac{9}{256})$; (253³¹/₃₂ + $\frac{9}{256}$ = 254¹/₂₅₆) ஆ உாய்சய்ரு வது கைவ (254¹/₂₅₆); ஆதலால்-ய்ரு தந் ரு ய்ரு தந் ரு குழி உாய்சய்ருவது கைவ (254¹/₂₅₆ = 254¹/₂₅₆) என்பது

[வி. கணக்கின் விசேஷ (க்குறிப்பு :—). உதாரணம் :—

இந்த கணித ஸாராம்சம் என்னவென்றால்:—ய்ரு தந் ரு ய்ரு தந் ரு குழிகணிக்கும் பூர்விக இந்துக்கள் வழியை இங்கு விளக்கப் படுகிறது. யெ.ய்ரு தந் ரு = 15¹/₁₆ = (10 + 5 + $\frac{3}{4} + \frac{3}{16}$) ∴

$$\therefore (10 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16})^2 = (10 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = A) (10 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = B) ∴$$

∴ செ A ஸை B ஆல் பெருக்கும் பூர்வீக உதாரணம் :—

A B	(இப்படியில்)			
	$(10 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16})^2$			
+ 10	100	50	$7\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{8}$
+ 5	50	25	$3\frac{3}{4}$	$\frac{15}{16}$
+ $\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{64}$
+ $\frac{3}{16}$	$1\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{9}{256}$
$(A+B)^2$ $= 254\frac{1}{256}$	$159\frac{3}{8}$	$79\frac{11}{16}$	$11\frac{61}{64}$	$2\frac{253}{256}$

இங்கே முழுஎண்களை

முதலில் கூட்டிய

159

79

11

2

251 ஆ இந்த இந்

தொகையுங் கூட்ட

251 (மெலெண்)

$3\frac{1}{256}$ (கீழெண்)

254 $\frac{1}{256}$ ஆ

என்றாகும் :

மிகுதி சின்னத் தொகைகளையும் கூட்ட :

$$\frac{3}{8} + \frac{11}{16} + \frac{61}{64} + \frac{253}{256} = \frac{96 + 176 + 244 + 253}{256} = \frac{769}{256} = 3\frac{1}{256} \text{ ஆ}$$

∴ செ $(A+B)^2 = 254\frac{1}{256}$ என்பதாம். இதை இன்னுஞ் சுருக்கமாக,

மூத்த. பாங்காசார்யர் முதலிய பண்டிதர்கள் கூறும் (உம்) வழி :—

செ $15\frac{15}{16} = \frac{255}{16}$ இதன் வர்க்க $= \left(\frac{255}{16}\right)^2 = \left(\frac{255}{16} \times \frac{255}{16}\right) = \left(\frac{65025}{256}\right) = 254\frac{1}{256}$. என்பதாம் இவ்விதமே எவ்விதக் கடின பின்னங்கட்டும் வர்க்கம் முதலிய லாதனம் செய்துக் கொள்ளலாகும்.]

இப்படி விரிவாய்ச் சொல்லுகிறதை சீக்கிரமாகச் சொல்லுமுதற்கு வகை-யிடு தூநு- $(15\frac{15}{16})$ யுடனே-ய $(\frac{1}{16})$ கூட்டினால் யிசு (16); மத்த-யிடு தூநு- $(15\frac{15}{16})$ யுடனே-ய $(\frac{1}{16})$ கூட்டினால் யிசு (16) என்று வைத்துக் கொண்டு யிசு ரு யிசு (16×16) குழி உாடுயிசு (256) இதில் யிசு-ய: க $= (16 \times \frac{1}{16} = 1)$ மத்தய-யிசு-ய: க $(16 \times \frac{1}{16} = 1)$ ஆக உ (2) தள்ளி நீக்கி-உாடுயிசு (254) இதனுடனே-ய ரு ய: வது கீ வ $= (\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}) =$ முந்திகீழ்க்கால் $= \frac{1}{256} + \frac{1}{256} = \frac{2}{256} = \frac{1}{128}$ பைக் கூட்டிக் கொண்டு ஆ உாடுயிசு வது கீ வ-ஆதலால் யிடு தூநு-ரு யிடு தூநு-ரு பெருக்கின குழி உாடுயிசு வது கீ வ $(15\frac{15}{16} \times 15\frac{15}{16} = 254\frac{1}{256})$ என்பது.

சயிகு தூசு ரு சயிகு தூசு ரு குழியெத்தகையென்றால்:— சயிகு தூசு $(49\frac{19}{20})$ வுடனே-ய $(\frac{1}{20})$ கூட்ட ருயி (50) மத்தய-சயிகு சு $(49\frac{19}{20})$ வுடனே-ய $(\frac{1}{20})$ கூட்ட ருயி (50) இதனை ருயி-ரு-ருயி-ரு பாற உசுரு $(50 \times 50 = 2500)$ இதில்

கனிவு-நுயி-ப: உ இ (50 $\times \frac{1}{20} = 2\frac{1}{2}$) மத்தய-நுயி-ப: உ இ (50 $\times \frac{1}{20} = 2\frac{1}{2}$) ஆக
 நு (5) தள்ளி நின்றது உச்சாகயிரு (2495) இதனுடனே-பரு ப: கீ த ப

$$= (\frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{400} = \frac{3}{1280} + \frac{1}{6400} = \frac{15+1=16}{6400} \therefore \frac{1}{400} = \text{கீழ் முக்காலேமா})$$

(ஆகையால் மொத்தம்) கூட்டித் துகை:—(உச்சாகயிரு கீ த ப) =
 (2495 $\frac{1}{400}$) ஆதலால்:—சமிக தசு (49 $\frac{1}{20}$) று சமிக தசு (49 $\frac{1}{20}$) று (குழி) குழி =
 உச்சாகயிரு கீ த ப (2495 $\frac{1}{400}$) என்பது.

கீழ்-மேல் கயிக தசு சூ றி வது று தென்வடல் கயிக தசு சூ றி வது று
 அதாவது (99 $\frac{319}{320} \times 99 \frac{319}{320}$) குழி பெத்தனை பென்றால்—இதற்கு யேரு
 லக்கத்தையும் (எ. எ: சமிக) விசையல்லவா (12ம் பக்கத்தில் காட்டிய விசேஷ
 உதாரணப்படி ஏற்படும் = $7 \times 7 = 49$ விசையல்லவோ) பெருக்க வேணும்.
 பெருக்கித் துகை காணுகிரவன். நூத்திலொருவன். அப்படி-12-ம் பக்கத்தில்
 காட்டிய வழிப்பபடிக்கே ($7 \times 7 = 49$) தரமாக வெகு விஸ்தாரமாய்ப் பெருக்கு
 வதற்கு உதாரண மாவட்டி:—

A \ B	90	+ 9	+ $\frac{3}{1}$	+ $\frac{1}{5}$	+ $\frac{3}{80}$	+ $\frac{1}{160}$	+ $\frac{1}{320}$
90	8100	810	67 $\frac{1}{2}$	18	3 $\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{32}$
+ 9	810	81	6 $\frac{3}{4}$	1 $\frac{4}{5}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{9}{160}$	$\frac{9}{320}$
+ $\frac{3}{1}$	67 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{320}$	$\frac{3}{640}$	$\frac{3}{1280}$
+ $\frac{1}{5}$	18	1 $\frac{4}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{400}$	$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{1600}$
+ $\frac{3}{80}$	3 $\frac{3}{8}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{9}{320}$	$\frac{3}{400}$	$\frac{9}{6400}$	$\frac{3}{12800}$	$\frac{1}{25600}$
+ $\frac{1}{160}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{160}$	$\frac{3}{640}$	$\frac{1}{800}$	$\frac{3}{12800}$	$\frac{1}{25600}$	$\frac{1}{51200}$
+ $\frac{1}{320}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{320}$	$\frac{3}{1280}$	$\frac{1}{1600}$	$\frac{3}{25600}$	$\frac{1}{51200}$	$\frac{1}{102400}$
9999 + $\frac{38401}{102400}$	8999 $\frac{23}{32}$	899 $\frac{311}{320}$	74 $\frac{1277}{1280}$	19 $\frac{1599}{1600}$	3 $\frac{19197}{25600}$	$\frac{31999}{51200}$	$\frac{31999}{102400}$

செ. கனின் ஸர்வஸம் யோகம் = 9999 $\frac{38401}{102400}$ ஆகுமிதன் = $(A+B)^2$.

$$(8999 + 899 + 74 + 19 + 3) = 9994 = \text{பூ.}$$

$$\frac{23}{32} + \frac{311}{320} + \frac{1277}{1280} + \frac{1599}{1600} + \frac{19197}{25600} + \frac{31999}{51200} + \frac{31999}{102400} = \left\{ \frac{550401}{102400} \right\} =$$

$$(73600 + 99520 + 102160 + 102336 + 76788 + 63998 + 31999)$$

$$102400$$

$$(\text{அ}) = 5 \frac{38401}{102400}; \text{செ} (\text{பூ} + \text{மி}) = 9994 + 5 \frac{38401}{102400} = 9999 \frac{38401}{102400}.$$

$$\therefore \left(99 \frac{319}{320} \right)^2 = \left(\frac{31999}{320} \right)^2 = \frac{31999 \times 31999}{320 \times 320} = \frac{1023936001}{102400} =$$

$$(9999 \frac{38401}{102400}) \text{ என்றே செ போலாம்.}$$

இதற்குச் சுருக்கமாகப் பெருக்குகிற வகை :—

கூடுக னு சய சூ றி வு (99 $\frac{319}{320}$) ரு (க்கு) மேலே—வுத ($\frac{1}{320}$) முந்திரி கூட்டா (100). மத்த ய-கூடுக னு சய சூ றி வு (99 $\frac{319}{320}$)க்கு மேலே—வுத ($\frac{1}{320}$). கூட்டா (100). இதைத்தன்னில் மாற-நா ரு ன = மிசு—(100 \times 100 = 10000) இதில் களிவு-நா வு: வய = (100 \times $\frac{1}{320}$ = $\frac{100}{320}$ = $\frac{10}{32}$ = $\frac{5}{16}$); மற்ற-நா-வுத வய = (100 \times $\frac{1}{320}$ = $\frac{5}{16}$). ஆ இடு ($\frac{5}{8}$) தள்ளி நீக்கி—கூடுகூடுகூடுக வடு = 9999 $\frac{3}{8}$ ரு மேல்—வுத ரு வு: கூவுத = ($\frac{1}{320}$ \times $\frac{1}{320}$ = $\frac{1}{102400}$) கீழ்முந்திரி கூட்ட துகை கூடுகூடுகூடுக வடு கூவுத (9999 + $\frac{3}{8}$ + $\frac{1}{102400}$) = (9999 $\frac{38401}{102400}$) சூழி யென்பது.—

இதை பாஸ்கராசாகாரியாதிகளின் வழியின்படிக்கும் (12ம் பக்கம் 2ம் விவரப்படி) செய்ய [$(99 \frac{319}{320})^2 = (\frac{1023936001}{102400}) = 9999 \frac{38401}{102400}$]]க்குழி செ போல் வரும். விட்டேறு லக்கமாக வந்தால் பெருக்குகிற வகைக்கு விபரம்:—

உமிச னூநு (24 $\frac{15}{16}$) ரு ஈடுக னூநு (39 $\frac{15}{16}$) ரு சூழி யெத்தனை ஏன்றல்.

உமிச னூநு (24 $\frac{15}{16}$) யுடனே மாகாணி (ய = $\frac{1}{16}$) கூட்ட உமிடு (25); மற்றய ஈடுக னூநு (39 $\frac{15}{16}$)-ய ($\frac{1}{16}$) கூட்ட சமி (40); உமிடு (25) ரு இனம் உஇ (2 $\frac{1}{2}$) யென்று நிருத்தி-சமி (40)ம் உஇ (2 $\frac{1}{2}$)யும் மாற-நா (100); இதை-மி (10)ல் படுத்த-சு (= 1000); யிதில் களிவு.—உமிடு (25) ரு-ய ($\frac{1}{16}$)-க இ ய (1 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{16}$ = $1 \frac{9}{16}$); சமி (40) ரு-ய ($\frac{1}{16}$)-உஇ (2 $\frac{1}{2}$) ஆ ச ய (4 $\frac{1}{16}$) தள்ளி நீக்கி கூடுகூடுக னூநு (995 $\frac{15}{16}$) ரு யிதவுடனே—ய ரு ய ($\frac{1}{16}$ \times $\frac{1}{16}$) வுத கூவ ($\frac{1}{256}$)ம் கூட்டி த்துகை—கூடுகூடுக னூநு வுதகூவ (995 + $\frac{1205}{256}$ = 995 $\frac{241}{256}$) சூழி யென்பது.

மற்றும் வந்தன வெல்லாம் இப்படிப்பார்த்துச் சொல்லவும்.

இப்பால் குளியளந்து கோலெடுக்குரதுக் குள்வாக நிலம் சொல்லு கிரதற்கு பந்துக் கட்டு. (ஃபரம். ரண்டு)

$$(1) \text{ மிச ரு ய: க} = (16 \times \frac{1}{16} = 1);$$

$$(2) \text{ மிடு ரு ய: னூநு} = (15 \times \frac{1}{16} = \frac{15}{16});$$

$$(3) \text{ மிச ரு ய: னூடு} = (14 \times \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8});$$

நீசு ரு யிசு ரு (16×16) நிலம் யெத்தனை யென்றால்—நீசு ரு ய: க $(16 \times \frac{1}{16} = 1)$; மத்த நீசு ரு ய: க $(16 \times \frac{1}{16} = 1) \therefore$ கரு கரு (1×1) மாற க ஆவது (1 ஆவது) -ப $(= \frac{1}{2^6} = \text{ஒருமா})$ ஆதலால் நீசு ரு யிசு ரு-ப $(= \frac{1}{2^6} = \text{மா} = \text{ஒருமா})$ என்பது.

நயிஉ (32) ரு நயிஉ (32) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்—நயிஉ ரு ய: உ $(32 \times \frac{1}{16} = 2)$ மத்த—நயிஉ ரு ய: உ $(32 \times \frac{1}{16} = 2) \therefore$ உரு உரு (2×2) மாற-ச- (4) நாலாவது-ச (4) $(\text{நாலுமா} = \text{சப})$ என்பது.

இப்படிச் சரி லக்கமாக வந்தால் இப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும். இனி விட்டுடரு லக்கமாக யேறுவகை வந்தால் மாறிச் சொல்லுகிற வகை:—

கீள் மேல்—உயிச (24) க்கு தென் வடல்-சுயிச (64) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்:— உயிச (24) யும்-ய $(\frac{1}{16})$ ல் தாக்க-கஇ $(1\frac{1}{2})$. சுயிச (64) யும்-ய $(\frac{1}{16})$ ல் தாக்கி-ச (4) என்று வைத்த:— க இ ரு ச $(1\frac{1}{2} \times 4 \text{ ரு})$ மாற—சு (6) :— சு-ஆவது சு (6) ப (ஆலுமா) என்பது.

சயிஅ (48) ரு-அயி (80) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்—சயிஅ ரு-ய-தாக்க ந $(= 48 \times \frac{1}{16} = 3)$; அயி (80) யும் ய $(\frac{1}{16})$ ல் தாக்க-ரு (5) ; ந ரு ரு ரு மாற $(5 \times 3 = 15) =$ யிரு (15) $(\text{பதினஞ்சுமா}) \therefore$ சயிஅ ரு அயி ரு (நில) யிரு (15) ப (மா) என்பது. இப்படி யேறு வகையாக வந்தால் ப $=$ (மா) பார்த்துச் சொல்லவும்:—

யேறுவகை தப்பாகவந்தால் ஒரு துகையை—ய $= (\frac{1}{16})$ யில் களித்து அதை மத்த ஒரு துகையுடனே மாறி திரும்ப வது (முந்திரிவாயில்) யில் களித்து நிலம் சொல்லுகிற வகை:—

கீ (4) ச ரு தென்மீ-யி (10) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்-ச (4) யும் $(\text{ய} = \frac{1}{16})$ வாயில் தாக்க — வ $(\frac{1}{4})$. இதனை — யி (10) ல் மாற — உஇ $(2\frac{1}{2})$ இதனை-வது $(\frac{1}{3^2 \cdot 5})$ யில் களிக்க-ரி கீ இ $= (\frac{1}{160} + \frac{1}{640} = \frac{5}{640} = \frac{1}{128})$ யென்பது.

அ (8) ரு-உயிரு (25) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்-அ: ய: இ $(8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2})$ இதை உயிரு (25) ல் மாற—யஉஇ $(12\frac{1}{2})$. இதை-வது $(\frac{1}{3^2 \cdot 5})$ யில் களிக்க—சூகீஇ $(\frac{5}{128} = \frac{3}{80} + \frac{1}{640})$ யென்பது.

சயி (40) ரு சுயி (90) ரு நிலம் யெத்தனை யென்றால்—சயி (40) யும்-ய $(\frac{1}{16})$ ல் தாக்க-உஇ $(2\frac{1}{2})$, இதுவுடனே-சுயி (90) யை மாற-உயிரு (225) , இதை வது $(\frac{1}{3^2 \cdot 5})$ யில் களிக்க—[இபு யறு = அறையேரிக்காலே மாகாணி (கால்வீச்சு) காணி முந்திரி] $(\frac{2^2 \cdot 5}{3^2 \cdot 5} = \frac{4}{9})$ யென்பது.

நிலை (32) ரூம்-சமீடு இலு (45 $\frac{5}{8}$) ரூ நிலம் பெத்தனை யென்றால்:—

நிலை (32) ரூ — ய ($\frac{1}{16}$)ல் தாக்க — உ (2). இதுவுடனே—சமீடுஇலு (45 $\frac{5}{8}$)லு
மாற — கூறிக வ (91 $\frac{1}{4}$) இதை வது ($\frac{1}{320}$)யில் கழிக்க — ரூமா. சுரிவதுகீ எ.
[அதாவது - (5 மா + $\frac{45}{64}$ மா) = (5 $\frac{45}{64}$ மா) நிலம்] என்பது

கீழ்மேல் தென்வடல் ரெண்டெம் மாயின துகை குழி-அதை-ய = ($\frac{1}{16}$)யில்
தாக்க — கரு. அதை-வது-யில் களி(ழி)த்தால் கண்டது சொல்லவும்.

இதில் க-க-ரு ஆயிறம் கண்டால் ஆயிறமும் வது-யில் களிக்க நலு
[($\frac{1}{320} \times 1000 = 3\frac{1}{8}$) = ($\frac{25}{8}$)]. இதை க (1) ரூ இருவது மாவல்லோ
(மாவல்லவா). அந்த-ப-உய (20)ல் பெருக்க-கூறியது (62 $\frac{1}{2}$). இதனை திரும்
பவும்—மா—படுத்த—கூறியமா —ச — (ச = அறைமா) யென்று சொல்லவும்.

கனத்தை சில்வானப் படுத்தவும், சில்வானத்தை கனப்படுத்தவும் வகை.

யொசு (பன்னிரண்டு தூறியிரத்துக்கு) ரூ-நசுளாருய (3750) குடுக்க
வென்றால் எண்சுவடி யன்றி யேது. கயிலேசரி சொல்லும் வகை.

மகாமேருவாகிய — யொசு (பன்னிரண்டு லகஷம் = 1200000) இதை
சில்வானப்படுத்த.

யொசு = (1200000) = (12 லகஷம்)

நாஉயசு = (120000) = (லகஷத்திரவதாயிரம்)

யொசு = (12000) = (பன்னிரண்டாயிறம்)

சூஉா = (1200) = (ஆயிறத்திருநூறு)

நாஉய = (120) = (நூத்திருபத்து)

யொ = (12) = (பன்னிரண்டு)

என்று ஆருஸ்தானம் கொண்டு நிருத்தி மத்த ய—நசுளாருய = (3750)யும்
அந்தப் படியே ஆருஸ்தானத்திலே (இப்படி).

நசுளாருய = 3750

நாஉளரு = 375

நயளரு = 37 $\frac{1}{2}$ = 37.5

நன = 3 $\frac{3}{4}$ = 3.75

வலு = $\frac{3}{8}$ = 0.375

சு (முக்காணி) = $\frac{3}{80}$ = 0.0375

நிருத்தி—என்று வைத்து—முன்னிருத்தின பேருக்கு—சு ($\frac{3}{80}$) ஈய (கொடுக்க)

ய—யவது—கி—உவது—அ—சு—ஆதலால்—யொசு—பேருக்கு—நசுளாருய
குடுக்க ஈயவு வது முந்திரி ($\frac{3750}{1200000} = \frac{1}{320} =$ வது) என்பதாம்.

மற்றும் வந்தன வெல்லா மிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.

குள் வெட்ட ள வு வருமாறு:—

கீள் மேல்-ச (4) ரு தென் மடல்-ச (4) ரு மட்டு-கரு-மட்டு-யெத்தனை
யென்றால்:—ச ரு ச ரு (4×4) மாற-யசு (16) இதில் மட்டு-க (1)ல் களிக்க—
யசு:ய — சு கசு— ஆ — யசு = $[(10 \times 1 = 10) + (6 \times 1 = 6) = (16)]$
இதனை—ய ($\frac{1}{16}$)யில் — ய ப. இழு — சு:ய: வழு = $[(10 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{8}) +$
 $(6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}) = (1)]$ ஆ மட்டு க—இப்படிச் சொல்லுகிற வகையைச் சுருக்
ச மாகச் சொல்லுகிறதற்கு விபரம்:—

கீழ் மேல் ச (4) ரு தென்மீ-ச (4) ரு மட்டு—க (1) ரு-மட்டு எத்தனை
யென்றால்:—ச (1) (யு) — ய ($\frac{1}{16}$)யில் களிக்க:— ச:ய: வ ($4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$),
மற்ற-(4)யும் மட்டில் களிக்க-ச:க: ச = $(4 \times 1 = 4)$ இதனுடனே
முன்னிருத்தின — வ ($\frac{1}{4}$) மாற-ச:வ: க ($4 \times \frac{1}{4} = 1$); ஆதலால் கீ-ச ரு
தென்மீ ச ரு மட்டு-க-ரு ($4 \times 4 \times 1$)க்கு மட்டு க (1) யென்பது.

கீ-அ (8) ரு தென்மீ-யரு (15) ரு மட்டு-ன ($\frac{3}{4} = 0.75$) ரு-மட்டு-யெத்தனை
யென்றால்:—கீள் மேல் (8) அ-யும் மட்டு ன ($\frac{3}{4}$)யில் களிக்க-அ:ன: சு =
 $(8 \times \frac{3}{4} = 6)$ இதனை-ய ($\frac{1}{16}$)யில் களிக்க — சு:ய: வழு ($6 \times \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$)
பென்று வைத்து. தென் வடல் — யரு (15)டனே மாற-ய:வ: உஇ =
 $(10 \times \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2})$; யழு: கவ = $(10 \times \frac{1}{8} = 1\frac{1}{2})$; ரு:வ: கவ = $(5 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2})$;
ருழு: இழு = $(5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8})$ ஆ ரு இழு = $(5\frac{5}{8})$. ஆதலால் கீ-அ ரு தென்
மடல் யரு ரு மட்டு ன ரு-மட்டு ருஇழு ($5\frac{5}{8}$) யென்பது.

கீள் மேல் உயச (24) ந்து தென்மடல்-(32) நயஉ-ரு-மட்டு-இழு ($\frac{5}{8}$) ரு மட்டு
எத்தனை யென்றால்:—தென் மடல்-நயஉ (32)ம் மட்டு-இழு ($\frac{5}{8}$)யும் மாற:—
நய:இ: யரு ($30 \times \frac{1}{2} = 15$); உ:இ: க ($2 \times \frac{1}{2} = 1$), நய:ழு: ந ன
 $(30 \times \frac{1}{8} = 3\frac{3}{4})$, உ:ழு:வ ($2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$) ஆ-உய (20) என்று வைத்து-உயச
(24)யும் — ய ($\frac{1}{16}$)யில் மாற — உய-ய: க வ ($20 \times \frac{1}{16} = 1\frac{1}{4}$), ச:ய: வ
 $(4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4})$ ஆ கஇ ($1\frac{1}{2}$) இதனுடனே முன்னிருத்தின-உய (20)யு மாற-
உய:க:உய; உய:இ: ய; ஆ நய = $(20 \times 1\frac{1}{2} = 30)$; ஆதலால் கீ-உயச ரு-
தென்மீ-நயஉ-ரு மட்டு இழு ரு மட்டு நை-நய (30) யென்பது.

மத்தும் இப்படி வந்த இனத்துக் கெல்லாம் ஒருகை கோலை-மாகாணி
(ய = $\frac{1}{16}$)யில் களித்து, ஒருகை கோலை-மட்டில் களித்து ஒன்றொன்று (ஒன்றுக்
கொன்று) பெருக்கிச் சொல்வது.

பின்னையும் ஒருவகை:—

ஒருகை கோலை மாகாணி (ய = $\frac{1}{16}$)யில் கழித்து ஒருகை கோலுடனே
பெருக்கி மட்டில் களித்துச் சொல்வது.

இதில் விறித்துக் காட்டல்:—

கூ-சுயிச (64)ரு தென்யீ-உயிஎ இ (27½)ரு-மட்டு-வ (¼)ரு மட்டு எத்தனை யென்றால்:—

சுயிச (64)யும் - ய - யில் சுழிக்க - ச (4). இதனை தென்மடல்:—
உயிஎஇ (27½)யுடனே மாற:—உயி:ச: அயி-எ:ச: உயிஅ-ச:இ: உ (27½ × 4 = 110)
ஆ-நாயி-மட்டு-வ (¼)லில் களிக்க - ரா:வ: உயிந - ரி:வ: உஇ ஆ உயிஎஇ
(110 × ¼ = 27½) ஆதலால் கீள் மேல்-சுயிச-ரு தென்மடல் உயிஎஇ ரு
மட்டு-வ-ரு மொத்த மட்டு உயிஎஇ (27½) என்பது. மறுபடி வந்ததெல்லாம்
யிப்படிக்க கணக்கு: சொல்லவும்.

விருத்தம்:—

ஆதியொன்று முதலன்பதின் வரை-

சேதி யாந்துகை செப்பிடில்; பத்தஞ்சை-

பாதி செய்தறைப் பங்குடன் கூட்டி முன்

னீதியானது ரெற்றினச் சுருக்கமே (4)

படி யடித் துகை யாதென்றால்:—

ஒன்று முதல் 10 (பத்து) மட்டும் நடத்த வருகிற துகை யெத்தனை
யென்றால் (அகாவது ஒன்று முதல் பத்துவரையில் கூட்டிய துகை
= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = ? =
என்னவென்றால்:— பத்துடனே ஒன்று கூட்டியத (11) இதில் பாதி
ருஇ (5½) முதலான பத்துடனே பெருக்க துகை-ருயிரு = (1+2+3+4+5
+6+7+8+9+10 = $\frac{10 \times 11}{2} = 5 \times 11 = 55$). ஆதலால் ஒன்று
முதல்-10-மட்டும் துகை ருயிரு (55) என்பது, (1).—

ஒன்று முதல் நூறு மட்டும் துகை யெத்தனை யென்றால்:— நூறுடன்-
க (1) கூட்டாக (101). இதில் பாதி (50½) = ருயிரு; இதனை 100 உடனே
மாற-ருசூரு (5050) = (1+2+3+..... + 100. மட்டும்)
கூட்டிய துகை = $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$ ∴ ஆதலால் நூறு
மட்டும் துகை-ருசூரு (5050) என்பது. மத்தும் வந்தன வெல்லாம் இப்படிப்
பார்த்துச் சொல்வதுன்ன முதலிலே மேல்-(க)-ட்டிக்கண்டதில் பாதியும்
முதலும் மாறக் கண்டது துகை யென்று சொல்லவும்.

(இதன் ஸம்பந்தமான இன்னுஞ்சில விசேஷங்களை முன்னுறையில் பார்க்கலாம்):—

எ(ண்)ஞ் சுவடி அலகு நிலை வருமாறு:—

ஒதிவாயி லொருவாய்(த்) துகை தனை—

ஆயினால் மாறி அடந்திருந்த வப்பொருளை—

அஞ்சினாலாய பயன்களை யத்தென்று—

(மே)மது-ஞ்சாதலகு நிலை சொல் (5) —

இதனை விறித்துக் காட்டல்:—

வாய்முதல்—அ—அா—(100—200) மட்டுந் துகை யெத்தனை யென்றால்:— அா (200)யும் கூ (6)ல் பெருக்க—அாசு: சூ அா (200 \times 6 = 1200) என்று வைத்து அதில் — டு: உ: ம = (5 \times 2 = 10) தள்ளி நீரு—சூகூய (1190), என்பது.

—வது—வாய்க்கு—குவதுவது—முதல் சூ:(வது): கூபு = ($\frac{1}{3\frac{1}{2}}$ — வாய்க்கு — $1 \times \frac{1}{3\frac{1}{2}} = \frac{1}{3\frac{1}{2}}$ முதல் 1000 $\times \frac{1}{3\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{5}$) மட்டுந் துகை யெத்தனை யென்றால்:—

கூபு ($3\frac{1}{5}$)ஐ ஆறில் மாற—கூ: கூ: மது: கூ:பு: சூ— ஆ மது சூ = ($6 \times 3\frac{1}{5} = 18\frac{3}{5} = 18.75$) இதில் ஓவது—தள்ளி நீக்கி—மதுஇ சூசு ரிவது = ($18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 18\frac{335}{320} = 18\frac{47}{64}$) \therefore ஆதலால் வது ($3\frac{1}{2}$). வாய்க்கு அலகு நிலை மது இ சூசு ரிவது (= $18\frac{47}{64}$) என்பது; மத்தும் வந்தன வெல்லாம் இப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.

இனிமேல் விசேஷமாக குறுக்கே முறிச்சுக் கேட்டால் சொல்லுகிறவகை விபரம்.

விருத்தம்:—

சொல்லிய எண்கவடி வாயளதோறும்—

துகை முறிச்சுத்தான் கேழ்க்கச் சொல்லக் கேளீர்;

வல்லவர்கள் சொன்ன லெக்கம் தனைத்தானத்தில்,

வாகாக நிருத்தி ரெற்றினச் சுருக்கந்தாக்கும்,

நல்லதுகை மேற்றூண நடத்திக் கூட்டி நவின்னுவரும்—

வாயள தன்னில் நாட்டு விராய்,

ல(வ)ல்லூரர் திபைந்து மட்டுந்தான்—

ஆமிரண்டிக் கப்பாலே முழு(ன்)றகுத் தானே=(6).

இதை விறித்துக் காட்டல்:—

க'ரு:ரு (1 \times 5 = 5) முதல். அய்'ரு: சா (= 80 \times 5 = 400) வரைக்குந் துகை யெத்தனை என்றால்:—

அய் (80)ரு. இனம் — அ (8) என்று வைத்து — அ (8) மட்டும் மாறினச் சுருக்கம் படியடித்து கை — கூயசு ($\frac{8 \times 9}{2} = 36$). இதை ரண்டுத்தானம் நடத்த — கூயசு — கூகூய = (36 — 360) இதை முன் துகை கூயசு (36)ங் கூட்ட முன்னுத்தித் தொண்ணுத்தாறு (கூகூயசு = 396). இதை யித்த வாயாகிய ரு (5)ல் மாற கூா'ரு: சூருா; கய்'ரு: சாருய; ரு'சு: கூய—ஆ சூகூஅய் (= $396 \times 5 = 1980$). ஆதலால் — க'ரு: ரு—முதல்—அய்'ரு: சா—வரைக்கும் துகை—சூகூஅய் (1980) என்பது. இந்தப்படி முதல் வாய் முதல் பத்து வாய் மட்டும் பார்த்துச் சொல்வது.

அப்பால்-ஒது-வாய்முதல் தூணி வாய் மட்டுக்குந் தானம் வருமாறு:—

சு.ரி: றி ($1 \times \frac{1}{160} = \frac{1}{160}$) முதல் ஞா.ரி: ஈடு ($500 \times \frac{1}{160} = 3\frac{1}{4}$)
மட்டுந் துகை யெத்தனை பென்றால்:—

ஞா (500)று இனம் று (= 5) என்றறிந்து-று (5) மட்டும்மாரிச் சுருக்கத் துகை
கூட்ட (வந்த) சுருக்கத் துகை (படியடிப்படி) — றிடு =
 $\left(\frac{5 \times 6}{2} = 5 \times 3 = 15\right)$ இதனை ஞா-யும்-று ஆக கருத்தினைச் சொனம்.
(ஈ = 3) மட்டும் நடத்த — றிடு — ஈடு — ஈடு — ஆக கூட்டின துகை
— ஈசுஈசுறிடு (1665) இதனை பிறத்தவாயாகிய-றி ($\frac{1}{160}$)—வாயிற் கருத்திற் — ஈ.ரி:
சுவ; ஈா.ரி: ஈடு; சு.ரி: வடு, றி.ரி: சு.ரி-ஆ = றி.ரி.ரி = ($1065 \times \frac{1}{160} =$
 $10 + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{160} = 10\frac{13}{32}$). ஆதலால் — சு.ரி: முதல் — ஞா.ரி:
ஈடு — மட்டுந் துகை = றி.ரி.ரி ($10\frac{13}{32}$) என்பது.

மத்தும் வந்தனவெல்லாம் இப்படிச் சுண்டு சொல்லவும்:—

ஒது ($\frac{1}{320}$) முத்திரி வாய் முதல்-ய ($\frac{1}{16}$) மாகாணி (மீசம்) வாய் மட்டின்—
சா (400) வறைக்குந் துகை யெத்தனை பென்றால்:—

சா (400)று இனம் = ச (4) என்று வைத்துந் கொண்டு — ச (4) வறைக்கும்
படியடித்துகை கூட்ட $\left(\frac{4 \times 5}{2} = 10\right)$ = றி. இதனை மூன்றுமட்டும்
நடத்தய = (10) — ஈ = (100) — ஈ = (1000). ஆக

சூ.ரி = (1110) என்று சுண்டு — பிறத்தவாயாகிய — ஒது — வாய்முதல் — ய —
வறைக்குந் துகை கூட்ட — ஒது — றி — று — சு — சு — ய — ய = றி சு.ரி.ரி.ரி
 $= (\frac{1}{320} + \frac{1}{160} + \frac{1}{80} + \frac{1}{40} + \frac{3}{80} + \frac{1}{20} + \frac{1}{16} = \frac{3}{80} + \frac{3}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = \frac{63}{320})$
இதனுடனே முன்னிருத்தின — சூ.ரி (1110)ந் மாற — ஈ.ரி: ஈடு
($1000 \times \frac{3}{80} = \frac{3000}{80} = 150$); ஈ.ரி: றிடு ($100 \times \frac{3}{80} = 15$); றி.ரி: சு.ரி
($10 \times \frac{3}{80} = \frac{3}{8} = 1\frac{1}{2}$) ஈ.சு.ரி: ஈடு.ரி.ரி ($1000 \times \frac{3}{80} = 37\frac{1}{2}$); ஈ.சு.ரி: ஈடு
= ($100 \times \frac{3}{80} = 3\frac{3}{4}$); — றி.சு.ரி: வடு ($10 \times \frac{3}{80} = \frac{3}{8}$); = ஈ.ரி: சுவ,
ஈ.ரி: இடு; றி.ரி: ய = ($1000 \times \frac{1}{160} = 6\frac{1}{4}$, $100 \times \frac{1}{160} = \frac{5}{8}$,
 $10 \times \frac{1}{160} = \frac{1}{16}$); ஈ.ஒது: ஈடு, ஈ.ஒது: வய, றி.ஒது: கி ($1000 \times \frac{1}{320} =$
 $3\frac{1}{8}$, $100 \times \frac{1}{320} + \frac{5}{16} = 10 \times \frac{1}{320} = \frac{1}{32}$) ஆக — ஊ.ரி.ரி.ரி இ சு.ரி =
($218 + \frac{1}{2} + \frac{1}{40} + \frac{5}{160} = + \frac{85}{160} = + \frac{17}{32}$) ஆதலால் — ஒது — வாய்
முதல் — ய — வாய் மட்டும் — சா — வறைக்குந் துகை — ஊ.ரி.ரி.ரி.ரி
($218\frac{17}{32}$) என்பது.

மீதும் வந்தன வெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.

பெருங்குளி(ழி) மாத்துக்குத் துகை வருமாறு :—

விருத்தம் :—

புரிந்த பெருங்கு(ழி)ரி மாற்றின் துகைதானின்னு

(று),(ம்); புல வோறை ஒன்று முதலீரைந்தாக வருந்துகைதானீர்

தெரிய வல்லீராகில்; வருத்திடய(அ)ரைதனில்

(பா)மாறி வைத்தீரை—அதிலத்திருந்தவே

நடுக்கட்டி சீனந்துகையால் தாக்கி(ச்)

செப்பியவை ரண்டுக்கு மந்திரமாய் நாளும்,

இருந்தபடியடி கூட்டி மூவர்க்கீயந்து—

இன்னதென்று வருங்குளி(ழி) வாயுமியம் புவி(7);

இதை விறித்துக் காட்டல் :—

கரு-க - குழி ($1 \times 1 = 1$ குழி) முதல் - மறு-குழி மீய: ஈ
($10 \times 10 = 100$) வரைக்கும் துகை யெத்தனை யென்றால்:—

-ம-ஐ-தன்னில்மாற-மா-($10 \times 10 = 100$) என்று நிருத்தி - ம - உடனே - க-
கூட்ட-மீக ($10 + 1 = 11$) - இதனை முன்னிருத்தின-மா-உடனேமாற-
சூா ($100 \times 11 = 1100$) என்று வைத்து இதுடனே-ம=(10) வரைக்கும்
படியடித் துகை நுமிரு (55) கூட்ட-சூாநுமிரு (1155) இதனை-ந. (3)ருக்
குடுக்க ஈயவு - நூஅமிரு = (385) = ($11^{5.5}$). ஆதலால் - மறு-ம - குழி
நூஅமிரு (385) என்பது :—

க (1) முதல் உமிரு (25) வரைக்கும் துகை எத்தனை யென்றால்:— உமிரு (25)யுந்
தன்னால்மாற - சூாஉமிரு ($625 = 25 \times 25$); என்று நிருத்தி-உமிரு (25)
உடனே-க-(1) கூட்ட-உமிரு (26). இதனை முன்னிருத்தின - சூாஉமிரு
(625)ல் மாற-சூா உமி: மீஉசூ ($600 \times 20 = 12000$); சூா-சூ: நூசூா
($600 \times 6 = 3600$); உமிரு உமி: சூா ($20 \times 20 = 400$); - உமி-சூ: ஈஉமி
($20 \times 6 = 120$); உமிரு: ஈ ($20 \times 5 = 100$); சூ-(ரு): நுமி ($6 \times 5 = 30$);
ஆ - மீசூசூாநுமி (16250); யிதுடனே - உமிரு (25) வரைக்கும் படியடித்
துகை கூட்ட - (வருவது) மீசூசூாநுமிரு [$(16575) = (25 \times 26 \times \frac{1}{2})$
 $= 325; + 16250$]. இதனை-ந-(3)ருக் குடுக்க ஈவு. நூசூாநுமிரு =
[$(16575 \times \frac{1}{2}) = (5525)$] என்பது.

மத்தும் வந்தனவெல்லா மிப்படிப் கண்டு கொள்வது.

(வேறு)

முத்துகை வினா வருமாறு:—

விருத்தம்:—

பன்னிரண்டு படி நெல் முக்கால்பணமென்ன

வெண்கலமெத்தனைப் பொன் நென்னில்

அது தன்னதாய் நடுவுங்கடையுந் தாக்கியே

முன்னமீயந்து மொளியுங் கணக்கிதே “(8)” என்பது :—

நெல் படி-யெ (12)க்கு விலை பணம்-தூ ($\frac{3}{4}$)ல் ஆக - அள (8) கலத்துக்குற (பணம்) எத்தனை யென்றால்:—

அள மும் (8கலமும்) னுளிப் படுத்த - ளாயெ (720) இதை நடுவாகிய-தூ ($\frac{3}{4}$)-வில்-மாற னாசய (540) இதை முதலாகிய-யெ (12)ற்குக் குடுக்க ஈயவு-சயெடு (45).

ஆதலால்:— படி-யெ (12)று விலை ப — (பணம்). தூ ($\frac{3}{4}$)ல் ஆக-அள (8 கலத்து)று — சயெடு (45) பண மென்பது.

மத்தும் வந்தனவெல்லாயிப்படிக்க கண்டு சொல்வது:—

இதில் மத்து மோர் இனம் வருமாறு:—

முதலுங் கடையும் பெருக்கி நடுவுக்குக்குக்கிறவகை:—

விரித்துக்காட்டல:—

• விருத்தம்:—

ஆறறை பணத்துக்கு அறுநூறு தான்தேறு

காகிரண்டாயிறத் தெட்டறைக்காகவே

விலைமுன்கண்டு கொண்டு தான்

மாறியே நடுவாக விள(க்)குவிர் ——— (9) என்பது—

சுஇ ($6\frac{1}{2}$) ப - (பண)று—சுள (600) கூ ஆக உச்சுஅஇ ($2008\frac{1}{2}$)று நெ எத்தனை யென்றால்:—

முதலாகிய ($6\frac{1}{2}$) சு இ - யும் கடையாகிய - (உச்சுஅஇ) இரண்டாயிறத் தெட்டறை ($2008\frac{1}{2}$)யும் பெருக்க - யெநுருயெடு வ ($1305\frac{1}{4}$) இதை நடுவாகிய-சுள (600)க்கிய ஈயவு:—

உயக தூ ரி கூ தூப = $[(21 + \frac{3}{4} \frac{1}{160} + \frac{1}{1280} + \frac{1}{6400}) = (21 + \frac{3}{4} + \frac{1}{160}) + (\frac{1}{6400} = \frac{1}{160}) = (21 + \frac{3}{4} + \frac{1}{160} + \frac{1}{160} = (21\frac{3}{4}) + (\frac{40 + 16 = 56}{6400}) = (21\frac{3}{4} + \frac{7}{800}) = (21\frac{607}{800})]$. ஆதலால்:—

சு இ ($6\frac{1}{2}$) ப — று கூ சுள (600) ஆக உச்சுஅஇ ($2008\frac{1}{2}$) று-உயக தூர(யும்) கூ தூப = ($21\frac{607}{800}$) என்பது.

(இந்த மா திறியையே இன்னும் பின்னத்தில்):—

தூநு- ($\frac{1}{16}$) பெருக்கு-நய (30) ஆக:— சூஅளயஅ (1818)று. யெத்தனை யென்றால்:—

சூஅளயஅ (1818)யும் தூநு- ($\frac{1}{16}$) (ஆல்) பெருக்க—சூளாசவடு (1704 $\frac{3}{8}$) இதை நடுவாகிய—நய (30)ற்குக் குடுக்க ஈவு = நயசு தூய (= $56\frac{1}{16}$) என்பது மத்தும் வந்தன வெல்லாயிப்படிக்க கண்டு சொல்லவும்.

(வேறு)

ஐந்துகை விகற்பம் வருமாறு:—

விருத்தம்:—

நால்னாக்கு கொண்ட அடிக்கோலினாலே-

நவின்ற குளி(ழி) நூறு, மறுனன்கதாக

(அறு னன்கதாக) வேனாக்கு

சோலதனால், குளி(தானென்னில்), யாதென்னில்

விரான முத்துகையைத் தன்னால் மாறி

யானாலே யதனுடனே நூறைத் தாக்கி.

அறிவுடையிர் கடைசியறுனாக்குதன்னை

தானாக்கு கு(ழி)ளிமாறி இதனுக்கு முன்-

தருந்துகையை தானீய்ந்து சாற்று விரே (10)

என்பது:—

(16) யசு-டிக் கோலால் குளி-ள (100)க்கு (24) உயச-டிக் கோலால் குழி
யெத்தனை யென்றால்:—யசு (16)யுந் தன்னால் மாற—உளருசு (256 = 16 × 16); இதை ஈ (100)ல்-பெருக்க-
உயருசுசுள (25600). இதை நிருத்தி; கடைசியாகிய-உயச (24)யுந் தன்னால்
மாற-ருளசு (24² = 576) இதற்கு முன்னிருத்தின-உயருசுள (25600)யுந்
குடுக்க:—

(இதற்கு விபரம்):—

ருள-சய: உயசு (500 × 40 = 20000);

எய-சய: உயசு (70 × 40 = 2800);

சய-சு: உளசய (40 × 6 = 240);

ருள-ச: உயசு (500 × 4 = 2000)-

எய-ச: உளசய (70 × 4 = 280)-

சு-ச: உயச (6 × 4 = 24)-

ருள-வ: ஈஉயரு (500 × $\frac{1}{4}$ = 125)-எய-வ: யு இ (70 × $\frac{1}{4}$ = 17 $\frac{1}{2}$)-சு-வ: க இ (6 × $\frac{1}{4}$ = 1 $\frac{1}{2}$)-ருள-நி: எயரு (500 × $\frac{3}{20}$ = 75)எய-நி: யு இ (70 × $\frac{3}{20}$ = 10 $\frac{1}{2}$)-சு-நி: க இ (6 × $\frac{3}{20}$ = 1 $\frac{9}{10}$)-ருள-நி: கபு (500 × $\frac{1}{160}$ = 3 $\frac{1}{8}$)-எய-நி: வநு (70 × $\frac{1}{160}$ = 7 $\frac{1}{16}$)-சு-நி: சு (6 × $\frac{1}{160}$ = 3 $\frac{3}{80}$)-ருள-வது: கஇய (500 × $\frac{1}{320}$ = 1 $\frac{9}{16}$)-எய-வது: கஇரி (70 × $\frac{1}{320}$ = 7 $\frac{1}{32}$)-சு-வது: இரி (6 × $\frac{1}{320}$ = 3 $\frac{3}{160}$)-

ஆ உயருசுசுள (25600)ம் சரி-

(இவ்விரம் சொல்லும் வழி இவ்வளவு விஸ்தாரா மடைகின்றது.)

ஆதலால் ஈய்வு - (சயிச வநிரிவது:) என்பது ஆகையால் - டிக் (16) அடிக் கோலால் குழி 100 (100) ரூ-உயிச (24) டிக் கோலால் குழி - சயிச வநிரிவது என்பது.

குறிப்பு:—இங்கே மேற் சொன்ன கணக்கில் விடை இருவிதமாகச் சொல்லப் பட்டிருக்கிறது. ஷே இரண்டு விடைக்கும் விலோம கணிதத்தால் முன் குழி (100) என்பது வரவில்லை ஆனாலும் ஷே இருவித விடைகட்க்குப்பதிலாக (இங்கு - சயிச வநிரிவது-) என்று விடையைக் கொண்டால் ஷே இரு விடைகளைப்போல் அவ்வளவு பெரும் பிழையாக ஏற்படவில்லை - $(+ \frac{1}{1280})$ இவ்வளவு தான் வித்தியாசம் படுகின்றது. (கணிதப் பெருக்கால் பிரமையால் மூலப்பொது வழியிலும் இந்த $[\frac{1}{1280} = \frac{3}{80}]$ முக்காணி கணிதமும் விடப்பட்டது) என்பது உணர வேண்டியதவசியம்.

ஷே - சயிச வநிரிவது - என்பதை சரிதான் என்று நிரூபித்தல்:—
விவரணமிங்கு:—

மேலே கூறப்பட்ட விடைகள்

$$(1) \text{ சயிச வநிரிவது } = (44 + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 44\frac{131}{320});$$

$$(2) \text{ சயிச வநிரிவது } = (44 + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 44\frac{135}{320});$$

$$(3) \text{ சயிச வநிரிவது } = (44 + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{3}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 44\frac{143}{320});$$

இவ்விதமாகும்.

இனி இந்த மூன்றுவித விடைகளில் எது மிகவும் சமீபத்தில் சரியாகும் என்பதை நிச்சயிக்க விலோம கணித விவரணம்-கீழ்.

$$\therefore (\frac{16}{24})^2 = \frac{256}{576} = \frac{4}{9} \therefore$$

$$(1) 44\frac{131}{320} \times \frac{9}{4} = 99\frac{1179}{1280}$$

$$(2) 44\frac{135}{320} \times \frac{9}{4} = 99\frac{1215}{1280}$$

$$(3) 44\frac{143}{320} \times \frac{9}{4} = 99\frac{1287}{1280}$$

என்றேற்படுவதால்:—

குழி - 100 - க்கு—

$$\text{முதல் விடை வித்தியாசம்} = (- \frac{101}{1280})$$

$$\text{இரண்டாம் விடை வித்தியாசம்} = (- \frac{65}{1280})$$

$$\text{மூன்றாம் விடை வித்தியாசம்} = (+ \frac{7}{1280})$$

இவ்விதம் போன்ற கணிதத்திற்கெல்லாம் மிகவும் குறைந்த சமீப வித்தியாசத்தை எந்த விடை தருகிறதோ அதையே எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும் என்பது கணிதப் புலவர்களின் துணிவு. ஆகையால் இந்த விஷயத்தை மகான்கள் அவசியம் கவனிக்க வேண்டியது.

இவ்விஷயத்தில் பாஸ்கராசாரி யாதிகளின் ப்ரமாணவழி :—

தெரிந்தவைகள் :—

ஒர் கோல் = 16 அடி. மற்றொன்று = 24. நிலக்குழி விஸ்தீர்ணம் = 100ம்
16 அடிக்கோலுக்கு \therefore செ 100 குழி 24 அடிக்கோலுக்கெவ்வளவு என்பது
கேள்வியும் தெரிய வேண்டியதும். :—

$$100 \times \left(\frac{16}{24}\right)^2 = 100 \times \frac{16 \times 16}{24 \times 24} = 100 \times \frac{256}{576} = 100 \times \frac{4}{9} =$$

$$\frac{400}{9} = 44.4444 = 44.44444444 \dots \text{ என்பதாகும் : ஆனாலும் இவ்வித}$$

கணிதங்கள் எப்போதும் முடிவையே அடையாது (அதாவது மிச்சமின்றி யிராது) ஆகையால் வேண்டிய வறையில் சூசு மத்தைக் கணித்துத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

இவ்விதம் ஏன் கொள்ளவேண்டியதென்றால் (கீழ்க் முதலிய) பின்னம் என்பது இஷ்டம் போன்ற எல்லைக் குட்பட்டது. சேஷத்தாதி கணிதங்களை இஷ்டத்தை மீறியதும் எல்லையற்றதும் என்பதும் உணரக்க.

மேலும் ஐ குழி = 44.4444444 - . . > என்பதன் = 44.4444444
10000000000...

இந்த $(\frac{4444}{10000})$ குழியை பூர்வீகர்களால் ஏற்படுத்திய கடைசியளவு (சுமார்) $\frac{3}{10}$ முந்தியியல் பெருக்கி = $\frac{4444}{10000} \times 320 = 142.22$ ஆகையால் முன் சொன்னது போல் குழி = $44\frac{4}{5}\frac{2}{10}$. இதையும் முன் போல் விலோம கணிதம் செய்ய $44\frac{4}{5}\frac{2}{10} \times \frac{9}{4} = 9\frac{1278}{1280}$. இங்கும் குழி 100க்கு $(\frac{-2}{1280} = \frac{-1}{640})$ வித்யாசம் வருவதைக் கவனிக்கவேண்டும்.

இவ்விதம் நேரும் இடமெல்லாம் யுக்தியால் இவ்விதம் ஊகித்துக் கொள்ள வேண்டியதே முடிவாம்.—

இவ்வித வழிக்கு பாஸ்கராதிகளின் மூலஸ-ஞ்சரம் :— இம்மாதிரி கணிதங்கட்குப் பொதுவாக :—

இங்கு தெரிந்தவை:—

விசால (வர்க்க) மாகிய சேஷத்ரமும் (நிலப்பரப்பு) விசாலத்தைத் தெரிவித்த ஓர் கோலும், இதற்கே மற்றோர் விசாலத்தைத் தெரிவிக்க வேண்டிய கோலம் ஆக மூன்று உருப்புகளாம்.

இரு கோல்களின் தெரிந்த அளவு தீர்க்க (நீண்ட) ரேகையிலும் கேஷ்தாமோர் விசா லத்திலுமாகும். ஆகையால் இங்கு இனம் கித்பாசமாக விசாலமும் ரேகையுமாக, இருக்கிறது. மேலே தெரிவிக்கப்பட்ட இருவிதக்கோல் நீளங்களையும் விசாலமாக்க இஷ்டக் கோல்களும் கேஷ்தாமும் ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்ததாக ஆகின்றது. பிறகு :— “வர்க்கத்தினால் வர்க்கந்தைப் பெருக்கி வர்க்கத்தினால் வருத்த பலமும் வர்க்கமாம்” என்கிற ஸஞ்சரப்படி :— குழி தெரிவித்த கோல் வர்க்கத்தைக் குழியால் பெருக்கி, குழி தெரிவிக்க வேண்டிய கோலினுடைய வர்க்கத்தால் வருத்த நவே — இஷ்ட கோலாகிய வருத்த கோலுக்குரிய நிலப்பரப்பு (நிலத்துக்குரிய குழி) ஆகும். இந்த ஸஞ்சரத்தையனுசரித்தே மேலே உதாரணத்தில் காட்டியபடி வந்த $= (100 \times \frac{1}{9}) = 100 \times \frac{256}{576} = 44.4444...$ என்பது மற்றயபடி—(24)-ம் பக்கத்தில் காட்டிய ரீதியாகக் கணிப்பது காலத்தை வீணாகுவதும்—மனக்குழப்பத்துக் கிடமும்தான் ஆகின்றது.

மேலு மந்தவழி அதோடின்றி எதை எதை எதெதெற்குக் கொண்டு நிச்சயிப்பது என்ற சந்தேகமும் வேறு உண்டாகிறது.

பின்னும் ஒருவகை வெண்பா :—

கொண்ட வடியெட்டால் குளியுமொரு

நானாறு—கண்டகோல் குளிகாணுங்கால்,

கிண்டதொரு யெட்டைசனை மாரியியன்ற குளியிர்த்தாக்கி

தொட்ட குளிக்கியிந்து சரிசொல்—(11) என்பது:—

ஸமீகாரணம்:—

எட்டடிக் கோலால் குழி நானாறும், கண்டதொரு கோலாலளக்கக் குழி நூறு, அளந்த கோலுக்கடி யெத்தனை யென்றால் :—

அ (8)டிக் தன்னால் மாற — கூய்ச (64) இதை-சா (400)ல் பெருக்கக் குழி — உயிருக்கூசா (25600); இருத்தி இதை பின்கண்ட குழி னா (100)ரு குடுக்க ஈய்வு சரி குளிப்படுத்த-யிசுற-யிசு-குழி யிறு-யி: னா; யி:சு: கூய, — ஈகயி-, கூய: கூயி-உாஉயி-,சு:சு: நயிசு=உாருயிசு (ஒரே 256க்கு வர்க்கமூலம் $= (256)^{\frac{1}{2}} = 16$). ஆதலால்-அ (8)டிக் கோலால் குழி சாறுகண்ட தொரு கோலாலளக்கக் அளந்த குழி-நா-கோலுக்கு. — யிசு (16) என்பது.

என்றால் :— திறைறுசிகக் கணிதப்படிக்கு :—

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(கண்ட தொரு)} \\ \text{கோலின் வர்க்கம்)} \end{array} \right\} = \frac{(\text{எட்டடிக் கோல் வர்க்கம்}) \times (\text{நானாறு})}{(\text{நூறு})}$$

$$= \frac{(8)^2 (400)}{(100)} = \frac{64 \times 400}{100} = 256. \quad \text{இதன் வர்க்க மூலம்} = (256)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (16 \times 16)^{\frac{1}{2}} = 16. \quad \text{என்பதால் :—}$$

(தெரிய வேண்டிய கோலின் நீள வர்க்கம்)

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{(தெரிந்த கோல்)} \\ \text{நீள வர்க்கம்} \end{array} \right\} \times \left\{ \frac{\text{(தெரிந்த கோலாலானந்த நிலக்குழி)}}{\text{(தெரிய வேண்டிய கோலாலானந்த நிலக்குழி)}} \right\}.$$

என்று ஸூத்ரம் இவ்விதம் பிறக்கிறது.

மற்றும் வந்தனவெல்லாம் இப்படிக் கண்டு சொல்வது.

விருத்தம்:—

பத்துடறறடிக்கோலால் குளியுமே நாப்பது தனக்குப்-

போனையந்துந்து (பொன்னைந்து) நாலாறெத்த அடிக்கோல் குளி
(தூறுக்கு) ன-த் தானே ஓதவெனில்:—

முற் கோலைமாறி நேரேபெத்த (அடி)புடன் தாக்கி
முதலாய்க் கண்டு பின்னடியையும் குளியையும்ப்படிப் பேசு-

முத்துகைக் கீய்ந்ததனில் வந்த ஈவை-

முன் (சொன்ன) வந்த போதனில் (பொன்னதால்)

தாக்கி மொழிளிகுவிரே [= (12)]

என்பது— விறித்துக்காட்டல்:—

யசு (16) அடிக்கோலால் குளி சய (40) ரு.தீர்வை பொன் ரு (5) ப—அ—
உயசு (24) அடிக்கோலால் குளி-ரா (100) க்கு தீர்வை எத்தனை யென்றால்:—

யசு (16) யு—ந் தன்னால் மாற குழி உருயசு (256) இதை—சய (40) ல் பெருக்க-
யசுஉயசய (10240) என்று நிருத்தி - உயசு (24) யுந் தன்னால் மாற -
ருளயசு (576) இதை-ரா-(100)ல் மாறக் குழி-ருயசுசுரா = (57600) -
முன்னிருத்தின - யசுஉயசய (10240) க்குக் குடுக்க:—

$$\text{யசு. ரு : ருயசு} = (10000 \times 5 = 50000)$$

$$\text{உரா. ரு : ரு} = (200 \times 5 = 1000)$$

$$\text{சய. ரு : உரா} = (40 \times 5 = 200)$$

(1)ம்

$$\text{யசு. இ : ருசு} = (10000 \times \frac{1}{2} = 5000)$$

$$\text{உரா. இ : ரா} = (200 \times \frac{1}{2} = 100)$$

$$\text{சய. இ : உய} = (40 \times \frac{1}{2} = 20)$$

(2)ம்

$$\text{யசு. ரு : ருசுஉரு} = (10000 \times \frac{1}{8} = 1250)$$

$$\text{உரா. ரு : உயரு} = (200 \times \frac{1}{8} = 25)$$

$$\text{சய. ரு : ரு} = (40 \times \frac{1}{8} = 5)$$

(3)ம்

(1ம் + 2ம் + 3ம்) (சேர்க்க) ருருயசுசுரா (= 57600)ம்

சரி. ஒருவன் பேருக்கு) = ருதிபு (5) இதை முன்னிறை (முந்தியே) வந்த -
 ரு (5) ம் பணமாக்க - ருயி (50) இதனுடனே - ருதிபு (5) ஐ மாற-
 உஅயுகவ (281) :— ஆகலால் - ருயி (16) டிக்கலால் குளி - சயி (40) ரு
 ரு (5) ப— ஆ—உயிச (24) டிக்கலால் குளி (11 = 100)க்கு - உயிசயுகவ
 (உஅயுகவ=281) ப— என்பது : இதனால் :—

$$\left(\frac{24 \times 24 \times 100 \times 5 \times 10}{16 \times 16 \times 40} \right) = \left(\frac{7200 \times 5}{128} \right) = \left(\frac{3600}{128} = 281\frac{1}{4} \right)$$

என்று விடை ஏற்படுகின்றது.

விருத்தம் :—

திங்களொன்றுக் (கஞ்ஞாளிக்காலினாலே) கைநாழிக் காலினாலே—
 நெல் திருந்தவு முக்கலந் தனக்குச் சேவிப்போனும்—

சங்கையுடன் மதியாறு திவசம் பற்று (பத்து) தானே சேவிக்கு (மெண்
 னாள்) மெண்ணாழிக் காலால் இங்கு வென்றான்

பெருவதுறை செய்ய வென்றால்—

இயன்றுமுதலுடனே கடைசியெட்டை மாறி-

அங்கதவுமுதல் நின்ற தனைத் தாக்கி-அம்முதலுக்

கியந்தே கலமா மனாகுவினே (13) என்பது.—

நய (30) னாள் சேவித்தானுக்கு (5) ரு உ காலால் [(ரு=5) உற்பரக்காலால்]

நய (3 கலம்) ஆ மீ—சு (6) னாள் -- ரு (10) சேவித்தானுக்கு - அ உ
 காலால் (8 உற்பரக்காலால்) யெத்தனை என்றால் :—

[முதலாகிய - (நய) ம் - கடைசியாகிய அ (5ம்மாற)] முதலாகிய முப்பதும்.

கடைசியாகிய ஏட்டும்மாற - நய. அ. உஅசய = (30 × 8 = 240) என்று

வைத்து இதனை முதலாக நிருத்தி நயமும்-மரக்கால்படுத்த - சயி (கலம்

3 × 15 = 45) இதனை ரு உ (5.உயி ஆகிய) ஐந்தில் மாற - உஅயிரு

= (225) = (5 × 45 = 225) இதுவுடனே மீ சு (6) னாள் படுத்த - ஈஅயி

(180) இதுவுடனே னாள் - ரு = (10)ம் பத்தும் கூட்ட ஆ நாகய = (190)

னாளில்மாற—

$$\text{உஅ. ஈ. உயிச} = (200 \times 100 = 20000)$$

$$\text{உஅ. கயி : ருஅச} = (200 \times 90 = 18000)$$

$$\text{ஈ. உயி : உச} = (100 \times 20 = 2000)$$

$$\text{கயி. ரு. உயி : சூஅ} = (90 \times 20 = 1800)$$

$$\text{ஈ. ரு : ரு} = (100 \times 5 = 500)$$

$$\text{கயி. ரு : சாரு} = (90 \times 5 = 450)$$

ஆ - சயிசுளாரு = $42750 = (20000 + 18000 + 2000 + 1800 + 500 + 450)$ இதை முன்னிருத்தின - ஊசயி (240) பேருக்குக் குடுக்க ஈய்வு =
 ஈயிஅழு $\left(\frac{42750}{240} = 178\frac{1}{8} \right)$ இதை குருணி வாயில்களிக்க -
 மிகள - ஹரிநிநு ஆதலால்:— நயி நாள் (30 நாள்) சேவித்தானுக்கு நு வ
 காலால்—நாள் (3கலம்) ஆ - மீர் சா (6) நாள் - மி (10) சேவித்தானுக்கு -
 அடி காலால் - மிக. எ. ஹரிநிநு என்பது

மத்தும் வந்தன வெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்:—

விருத்தம்:—

மாதமொன்றுக்கு னுளிக்காலினாலே வாகாக நாக்கலமே பெத்தவேணும்—
ாத வெண்ணுலிக்காலால் இருபத்தாறு புரிந்தகலம் பத்தினவன்
 சேவிக்குந் திங்கள் யேதனில் (யாதென்னில்):—

முன்மர்க்காலும் நெல்லும் மாறி இதனுக்கே உத்ததெல்லாந் தாக்கி (உத்த
 தெல்லாந்தாக்கி) நய, சாதகமாய் வரும் பேரைநாளதாகத் தவறாமலுறை
 யென்றார் தமின் (மு) வல்லாரே (14) என்பது:—

விரித்துக்காட்டல்:—

நயி (30) னுள் சேவித்தானுக்கு . சா உ (6உ)க் காலால் - சள (கலம் 4) ஆ
 அடி (8உ)க் காலால் - உயிசு-எ- (26 கலம்) பத்திக்கொண்டவன்
 சேவிக்கும் மாதமெத்தனையென்றால்:— சா உ (6உ) யாகிய - சா ரு (6ரு)
 சள (4ள) மாகிய - சுய - மரக்காலையாற சுய. சா : நாகுயி = $(60 \times 6 = 360)$
 என்று நிருத்தி - அடி (8உ) யாகிய - அ ம (8ம) உயிசு. எ. (26ள) மாகிய-
 நாகுயி (390) பார [இங்கே விவரணம் யாதென்றால் : (6உ) யாகிய -
 6 மர்க்காலையும். (4ள) மாகிய $(4 \times 15 = 60) = 60$ மர்க்காலையும்மாற
 $= 6 \times 60 = 360$. என்றும், (8உ) யாகிய 8 மர்க்காலையும். (26ள) மாகிய
 $(26 \times 15 = 390) = 390$ மர்க்காலையும் மாற $= 8 \times 390 = 3120]$
 $=$ நசுளையி (3120). மூவாயிரத்து நூத்திருபத்து இதவுடனே முகலாகிய
 நயி (30) பார சுயநசுளா = $(3120 \times 30 = 93600)$ இதனை முன்னிருத்தின
 முன்னுத்தறுபத்துக்குக் குடுக்க (வேண்டிய விவரணம் கீழே)

ஊரு நய : சுயிசு = $(200 \times 300 = 60000)$

ஊரு. சுய : மிசு = $(200 \times 60 = 12000)$

நாரு. சுய, மிசு = $(300 \times 60 = 18000)$

சுயரு. சுய : நசுளா = $(60 \times 60 = 3600)$

ஆ சுயநசுளா (93600)ம் [ஊசுய = 260க்குச்] சரி (ஆதலால்) ஈய்வு-ஊசுய
 (260) இதனை (நாளானபடியால்) மாதப்படுத்த மீர் அ (8) னுள்-உயி (20)

ஆதலால்:— நயி (30) நாள் சேவித்தானுக்கு (சாஉ) காலால் (சயி) ஆ (அடி)
 காலால் - (உயிசு. எ) பத்தினவன் சேவிக்கும் மீர் பெத்தனை யென்றால்:—
 மீர் அ (8) நாள் உயி (20) என்பது.—

தாளிசை :—

கோல்தான் பதினாறு(ரி)லுற்றளவு கொண்டுவந்த ஒருமாவிலங் கூறதாக, அறு லுளியே குறுணி கொள்ளவே வருங்காலதால், ஏல வெண்கல வரிசை யாகவும், மிரா யிருத்திமென் வணா (வேண) ஏத்தமான இருபத்து நாலடி இரத்தக்கோலிலிருமாவில . . . லமே உளுதவனு மென்(ண்)படிக்காலி லெத்தனைக் கணக்கெனக்கணுக் கோலினைத் தன்னை ராறின முன்கண்ட மாவினில் - தாக்கியே - ஞால மென்ன வ(கு) று கட்சியெட்டதனில் நாட்டி. நீர்முதலாகவே நயின்ற மற்றதுமாறி நய்த்து கலம் நன்மை யாகவுறை நண்ணியே (15). பென்பது.

இதை விரித்துக் காட்டல் :— (குறிப்பு :— கால் = மரக்கால் என்பது) :—
யிசு (16)டிக்கோலால் - (மா.நிலத்துக்கு) :—

ப (மாவு) ரு - சு உ (6உ)க்காலால் (ஆறு உறி மரக்காலால்) அ.ள. (8கல) ஆ - உயிச (24)டிக்கோலால் உ ப— (2 மாவு) ரு அ (8) உறிக்காலால் நெல் பெத்தனை பென்றால் :—

முதலாகிய - யிசு (16)யு-ந் (தன்னில்) மாற குழி உயிருயிசு (256) விலம் ஒதுவாகிய ஒன்றுடனேயுமாற-உயிருயிசு (256). இதை கட்சி (அ உ = 8 உ ரி) யாகிய (அல் மாற- உச்சுயிசு (2048) பென்று முதலாக நிருத்தி —. சு (6) உ யாகிய - சு (?) [? = (ரு)]க்கும் - அ ள (8 கல) மரகிய ஈஉயி (120) ரும் மாற ளாஉயி (720 = 120 × 6) - உயிச (24) யுந் தன்னால் மாற - ளாஸு = (576) இதுவுடனே முன்னிருத்தின - ளாஉயி (720) ஐ மாற :—

ளா ரு. ளா : ளாசுருயிசு = (700 × 500 = 350000)

ளா ரு. எயி : சயிசு = (700 × 70 = 49000)

ளா ரு. சு : சசுஉா = (700 × 6 = 4200)

ளா ரு. உயி : யிசு = (500 × 20 = 10000)

எயி ரு. உயி : சசுா = (70 × 20 = 1400)

உயி ரு சு : ஈஉயி = (20 × 6 = 120)

ஆ சாசுயிசுளாஉயி = (414720) இதனை . உ (2) ப— - மா-வாகிய உ = (2)ல் மாற - அளாசுஉயிசுளாசு (8,29,440) இதை முதலாக நிருத்தி - உச்சுயிசு (2048) ருக் குடுக்க :

உச்சு : சா : அளாசு = (2000 × 400 = 800000)

சா ரு. சயி : யிசு = (400 × 40 = 16000)

சா ரு. அ : ளசுஉா = (400 × 8 = 3200)

உச்சு-ரு : யிசு = (2000 × 5 = 10000)

சயி-ரு : உா = (40 × 5 = 200)

அ-ரு: சய = $(8 \times 5 = 40)$ ஆ. இதன் மொத்தம் யாதென்றால் :—
 $(மரு \times உருஎன்) \left(\frac{829440}{2048} \right) = 405 = (சாரு)$ ஆ. இதனைக் குறுணிவாயில்
 களிக்க — $\left\{ (27) = \left(\frac{405}{15} \right) \right\}$ னா. ஆதலால் :—

மசு (16)ய்க் கோலால்-ப—ரு - சு உ(உறிக்) காலால் அள ஆ - உயச - ய்க்
 கோலால் உ ப— (உ ப = இருமா) ரு-அஉ (உறிக்) காலால் — உருஎ-
 ன-(27-கலம்) என்பது உ.

இது வன்றியுந் நிலத்தில் சில்வானமாக வந்தால்-நிலம் ஒருமாவுக்கு (ப-ரு)
 மசு (16) முந்திறி பென்று பெருக்கிச் சொல்லுவது :—

விளித்துக் காட்டல் :—

மஉ (12)ய்க் கோலால்-ப (1-மா = ப—) ரு-அ (8)ய்க் காலால் ஈள
 (3 = மூன்று கலம்) ஆ. — உயச (24)ய்க் கோலால் — 2 வது எ ரு
 $\left(\frac{1}{80} + \frac{1}{320} = \frac{5}{320} = \frac{1}{64} \right)$ கலத்துக்கு) சு (6)ய்க் காலால் ஷை பெத்தனை
 பென்றால் :—

முதலாகிய - மஉ (12) யுத்தன்னால் மாற மசுசு (144). இதுவுடனே ஒருமா
 (1=ப) வையு முந்திறி = மசு (16) ஆ வச்ச (வைத்து) மாற - உயசுநாச
 (=2304) இதை கடசியாகிய - சு (6)யிரியும் சு (6) ஆ வச்ச (வைத்து)
 மாற -மநசு அளஉயச (=1824) பென்று முதலாக நிருத்தி - அ (8) உ-
 யாகிய - அ (8) ரு = (மட்டுக்கும்) முக்கலமாகிய-சயரு (3 × 15 = 45)
 மும்மாற நாகுய (360) இக்கை-உயச (24) யுத்தன்னில் மாற நூளாகு
 (24 × 24 = 576) உடனேமாற

ருள ரு. நா : மருயசு = $(500 \times 300 = 150000)$

ருள ரு. சுய : நயசுநா = $(500 \times 60 = 30000)$

நா ரு. எய : உயசு = $(300 \times 70 = 21000)$

எய ரு. சுய சசுஉா = $(70 \times 60 = 4200)$

நா. ரு சு : சசுஅா = $(300 \times 6 = 1800)$

சுய ரு. சு : நாகுய = $(60 \times 6 = 360)$

ஆ = [உளசுநாசுய = (207360)] இதுவுடனே - சிலமாகிய (2 வது) எ யும்
 (முந்திறிப்படுத்த :— ரு) = [(சிலமாகிய - (2 வது) எ = $\frac{1}{80} + \frac{1}{320} = \frac{5}{320} = \frac{1}{64}$ எ யும் முந்திறிப்படுத்திய = $\frac{1}{64} \times 320 = 5$] ருஇடி (5) மாற :—

உளசுரு. ரு : மயசு = $(200000 \times 5 = 1000000)$

எசுரு. ரு : நயருசு = $(7000 \times 5 = 35000)$

நாரு. ரு : சருளா = $(300 \times 5 = 1500)$

சுய. ரு : நா = $(60 \times 5 = 300)$

உளசு. இ : மயசு = $(200000 \times \frac{1}{2} = 100000)$

எசு. இ : நயருளா = $(7000 \times \frac{1}{2} = 3500)$

$$\text{கூ. இ : கூடு} = (300 \times \frac{1}{2} = 150)$$

$$\text{கூ. இ : கூடு} = (60 \times \frac{1}{2} = 30)$$

$$\text{உகூ-பூ : உடுநூ} = (200000 \times \frac{1}{8} = 25000)$$

$$\text{எகூ-பூ : அளையடு} = (7000 \times \frac{1}{8} = 875)$$

$$\text{கூ. பூ : கூடு இ} = (300 \times \frac{1}{8} = 37\frac{1}{2})$$

$$\text{கூ. பூ : எஇ} = (60 \times \frac{1}{8} = 7\frac{1}{2})$$

$$\text{ஆ} = [\text{மக'கூ(டு)கூ-கூகூசு} = (\text{ளயகூகூ-கூகூசு})] = (1166400)]$$

இதை முன்னிருத்தின முதல் - மகூஅகூஉயச = (13824) க்குக் குடுக்க
அயச வபு = (84 $\frac{3}{4}$)-இதை குருணிவாயில் கழிக்க - ளா - சச - மீ
உ(உரி) ஜ = (5 கலம்-தூணி 4-மரக்கா உ;உறி $\frac{3}{4}$) என்பது.

மத்தும் வந்தன வெல்லா மிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.

விருத்தம் :—

பணமொன்றுக் கெண்ணாறிக் காலிநால்

நெல்பதக்கு மறுனாறி விலைபகருங்காலை

குண முடையீரொன்பது பொன் ஏளுக்கேநெல்

கூறு வீரறுனாறிக் காலாடென்னில் .—

பண முதலும் அறுனாறிதனையு மாறிப்

பண்பாகப் பணமொன்றுந் துகையுந்தாக்கி

மணமலர்சேர் குளமுல் மடனீர் முந்துகைக்கீய்ந்து

வருமீவைத்தான் குருணிவாயில் நாட்டே (16) என்பது :—

இதை விறித்துக்காட்டல் :—

பணம் க (1)க்கு-அ (8) உரிக் காலால் ஷெ னு-கூஉ = (பதக்கே ஆறு உறி) ஆ-
கூ பொன் எ (= 9 பொன் 7)ரு-கூ (6) உரிக்காலால் நெல் யெத்தனை
யென்றால்.—

முதலாகிய பணமொன்றும் - கடைசியாகிய; கூ (6) உரியாகிய - கூ (6)ம் மாற-
கூ; க; கூ (= 6 × 1 = 6) என்று முதலாய் நிருத்தி-அஉ (8-உறி)
யாகிய-அ (8)ம் பதக்கே அறுனாறியாகிய-உ ஜ (2 $\frac{3}{4}$)ம் மாற :—

உயஉ (2 $\frac{3}{4}$ × 8 = 22) ஷெ (ஹரி) - கூ பொன் எ (9 பொன் 7)ம் பணப்படுத்த
(97 = 9 × 10 + 7) = கூயஎ - இதுவுடனே உயஉ (22) மாற
= உகூநகூயச (= 2134) இதனை முன்னிருத்தின.....பேருக்குக்குடுக்க-
சயவு-நகூநகூடு இந்நிஷத (335 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{8}$ + $\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{32}$ = 335 $\frac{13}{32}$)

[இங்கே விசேஷம்:—ஆக 2134ஐ வகுத்த வேண்டிய எண்-6. (ஆறேதான்); சுவடியில் எக்காரணத்தாலோ — (நாடுநடு இ நிறுவது) என்றிருக்க வேண்டிய துகையானது (நாடுநடு இ நிறுவது) என்றே தானிருக்கிறது. இதை புத்தி மான்கள் அவசியம் ஆலோசனை செய்ய வேண்டியபதாகும். மேலும் இதன் வாஸ்தவமான எண்ணிக்கையின் = $[(\frac{2134}{6} = 355\frac{2}{3}) = (355 + \frac{2}{3} \times 320) = (355 + \frac{640}{3}) = (355 + 213\frac{1}{3})$ வது = (என்றால் மூன்றிலோர் பங்குடன் கூடிய இருநூற்றுப் பதின்மூன்று முந்திரியும் மூன்னூத்தைப்பத்தைந்து மென்று சொல்வது.)]

இதைக் குறுணிவாயில் களிக்க:— உயிந கலம் தூணி ௪ (23 கலம் தூணி 4) ஆதலால்:— பணம் ௧ (1) ரூ அ ௨ (8௨) க்காலால் (ஹ ஈ ௨) ஆக — ௬ பட எ ரூ — ௬ உறிக் காலால்: உயிந ௭ ௪ தூணி உறி - ௧ - = (கலம் 23 தூணி 4 உறி-1-) என்பது.

விருத்தம்:—

மூவியிலு மறுனாள் க்காலிலே

பொருந்திய முக்குறுணி ஒருபணமதாக—

மேவியதோ ரென்னு(ண்ணு) ளிக்காலிலே

விளங்கியபெல் யெண்கலமே விலையே(யா)தென்னில்

கூவியமுன்படி யுடனேமுக்குறுணி தாக்கிக்

கொண்டதனை முதலாகக் குறித்துக்கொண்டே

ஒவியமாய் வருமூன்று துகையும்மாறி

ஒருதுகைக்கீழ்த்தே பணத்தை உறைத்திடறே (17) என்பது.—

பணம் - ௧ (1) ரூ ௬ (6) உறிக்காலால் (முக்குறுணி) ஆக அ (8)௨ க்காலால் அ ள (8 கலத்துக்கு)ப் பொன்னெத்தையென்றால்:—

௬ ௨ யாகிய - ௬ (6க்கும்), (3க்குறுணி) யாகிய ௩ (3க்கும்) பெருக்க ௬. ௩ : 1௮ (= $6 \times 3 = 18$) என்று கிறுத்தி;— அ (8) ௨ யாகிய (3ம்) அ-ம் எண்கலமாகிய (= $8 \times 15 = 120$) - ஈஉறி -க்கும் மாற:—

காசுய = (960) இதைப்பணமாகிய - ௧ (1)ல் மாற = $(960 \times 1 = 960) =$ காசுய. இதை முன்னிருத்தின - 1௮ (18) ரூ க்குக்க ௩ய்வு-(பணம்)- = ௩௮௩வகிரி கீ-இநிறுவது இம்மி ௩ இ = $[(53\frac{1}{3}) = (\frac{160}{3}) =$ (பொன்-ரு; பணம் - ௩வகிரிகீ-இ நிறுவது — இம்மி — ௩இ = பொன் 5-பணம்-3 $\frac{1}{3}$)]:— என்பது.

கொச்சகம்:—

ஓரெட்டு மாத்தில் ஒருவிராகன்பணமே—

நேரிட்ட நாலெளம்(நாளெளம்) டீயாறுமாத்துக்கு பேரிட்ட முன்னிரண்டும் பெருக்கமுதல்மூன்றும்

நீரூட்டத்தாக்கி நிறுத்தினத்துகைக் கீழ்விரே (18) என்பது:—

இதை விரித்துக் காட்டல் :—

அ (8) மீ (மாத்து) விராகன் க ரு (1க்கு) [உயிஅ = (23) பணமாக]

கூ மீ (6மாத்து) விராகன் ஒன்றுக்கு ப— (பணம்) யெத்தனை யென்றால் :—

அ-ம்-க ம்-பெருக்க அ. க : அ = $(8 \times 1 = 8)$. என்று நிருத்தி - உயிஅ, ம்

கூ ல் பெருக்க :— (நகராஅ) $(= 23 \times 6 = 168)$ இதைக் கட்சியாகிய ஒன்னிற்
மாற = நகரஅ (168) இதை முன்னிருத்தின - அ ரு (8க்கு) க்குடுக்க நயவு
றெ உயக $(1\frac{6}{8} = 21)$.

ஆதலால் :— அ (8) மீ விராகன் க (1)க்குப் பணம் உயிஅ (23) ஆக (6)
மீ விராகன் க (1) ரு றெ - உயக (21) பணம் என்பது :—

கொச்சகம் :—

மாத்தெட்டில் நன்றாய்வரும் விராகன்களெனான்கே

(நான்கே)த்தவிலை ஒன்பதுபொன்

னெட்டுக்கே னுமாத்தில் பாத்துவிலை

கூபபணு (க்குப்பணம்) பின்மாத்தும்

பெருக்கியேத் துகைதாக்கி

முதலுக்கியிந்து மிகசொல்விறே = (19)—

யென்பது :—

அ (8) மீ ல் விராகன்-க. ரு [உயிஅ (28) பணமாக] உ பொ-அப (2-பொன்
8 பணம்)] பணமாக கூயிஅ (98) ரு எ (7) மீ ல் விராகனெனத்தனை யென்றால் .—

பணமாகிய - உயிஅ (28) ரு - இருபத்தெட்டுக்கும் - பின்மாத்தாகிய- எ-ரு
(7க்கும்) பெருக்க - நகரஅ $(28 \times 7 = 196)$ என்று (வைத்து.) நிருத்தி - முன்மாத்தாகிய - அ ரு (8க்கும்) பணமாகிய - கூயிஅ (98) ரும் மாற - எளஅயிசு =
 $(98 \times 8 = 784)$ இதனுடனே விராகனாகிய - க (1) ல் மாற - எளஅயிசு (784) -
முன்னிறுத்தின - நகரஅ = (196) ரு க்குடுக்க நயவு - ச $(= \frac{784}{196} = 4)$

ஆதலால் :— அ மீ விராகன்-க- ரு உயிஅ பணம் ஆக கூயிஅ ரு எ மீ ல்
விராகன் ச $(= 4)$ என்பது.

கட்டளைக்கலிப்பா :—

சொன்னமாத்திற்கு நான்கைந்திடையுடனே—

தொன்று முண்டெட்டைற - மூன்றுமே—

இன்னமென்னறை நாலாறுமாத்தி

ரண்டேகமாக வறுக்கியமாத்து

என்னவோவென்னிலே :—

இடைமாத்தையும் இதக்கமாறி

யிடைக்கியிந்து.....மாகி தெனப்பகா —

இந்த வாராக வருங்கணக்குயாவும் (20)

என்பது :—

இதை விரித்துக்காட்டல் :—

அ (8) மீல் விராகன் - ரு (5)—

எ (7) மீல் விராகன் - உ (2)

அ இ (8½) மீல் விராகன் - ரு (3)—

எ இ (7½) செ - செ ச (4)

சு (6) செ - செ - உ (2)

ஆ அஞ்சவகையு மேகமாக (ஒன்றாய்ச் சேர்த்து) உறுக்க. எத்தனை மாத்துக் காணுமென்னில் :—

அந்தந்த மாத்தையும் விராகனையும் ஒன்றுக்கொன்றுமாற :—

அ. ரு : சஉ = $(8 \times 5 = 40)$

எ. உ : மச = $(7 \times 2 = 14)$

அஇ ரு. ரு : உயருஇ = $(8\frac{1}{2} \times 3 = 25\frac{1}{2})$

எஇ ரு-சரு : ருஉ = $(7\frac{1}{2} \times 4 = 30)$

சு ரு. உரு : மஉ = $(6 \times 2 = 12)$

ஆ = ருஉயருஇ = $(121\frac{1}{2})$ —இதை விராகனாகிய (—ரு உ. ரு. ச. உ) = மச

$(5+2+3+4+2) = (16)$ ரு க்குடுக்க நயவு - எ இ யசு = $[(7+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32})]$
 $= (7+\frac{5}{16}+\frac{9}{160}+\frac{3}{1600}+\frac{1}{16000}+\frac{1}{160000}) = (7+\frac{59375}{160000}) = (7.59375)$
 $= (7 + \frac{10}{32} + \frac{9}{32}) = (7\frac{19}{32})$ மாத்தென்பது.

இன்னாகலித்துரை :—

பேவான ஒன்பதறை மாத்துநாலு விராகனிலே—

மெ (யே)வானவெள்ளி இதனோடு இருக்க

வேணமாத்திலருகரு நூலா கம ந்தனில்

முன்மாத்துடனு வ(னு)னுனிடை பேருக்குப்

பாலாமாகிதம்புக்கு மாத்துக்கியந்து—

பகர்வா யென்னே :— (21)

இதை விரித்துக்காட்டல் :—

சுஇ (9½) மீல் விராகன் - ச (4) ல் சிற்து வெள்ளி போட்டுருக்க - அ

(8) மீத்து கண்டது — இதிற்புகுந்த வெள்ளி யெத்தனையென்னில் :—

முன் மாத்தாகிய - சுஇ (9½)யும் - விராகனாகிய - ச - (4)-ம் பெருக்க - ருஉ

(38). இதை பிற்கண்ட மாத்து - அ (8) ருக்குடுக்க நயவு - சது (= $\frac{38}{5} = 4\frac{3}{5}$) -

முன் விராகன் - ச (4) போக ரீரு அதியம் (அதிகம்) வெள்ளி விராகன் —

து ($\frac{3}{4}$) ஆதலால் :— சுஇ மீ விராகன் - ச - ல் சிற்து வெள்ளி போட்டுறுக்க -

அ - மீக் கண்டால் :— உள்புகுந்த வெள்ளி விராகன் = (து = $\frac{3}{4}$) என்பது.—

ஆசிரியருத்தம் :—

மாதவன் சொன்ன முருவன்னமும் வண்மைந்தன் மலாமானிடையும் ரகமரு வருக்கயமும்-மறை தூலாஸத (ஸ்த)ருவாக வருகின்ற அங்கமணில் பொதநவவீர் கருங்குணமைந்து முதமுமபுகாமி குங்காண மோன்றூப் பூணமதாகவே நிரை கின்ற அருளினை புதலுதற் கெளிதாருமோ—காதலுடனவாவர (னவரவர்) பெருமை நின்ற...பு முளங்கண்டு கொண்டினி தாக்கியே— கணமாக வைத்த பின்னிடையிலே வருகின்ற காவதனை யெஞ்(ன்) சொல்லுவேன்—ஆதர வாகவே புகர் மொளியை மேல் வைத்து அரிதாக வுதவிசெய்து வாமெனவுமே காதரமிதனையே தெரிந்தரைகின்ற சவினிதவிதியே (22); என்பது :—

விரித்துக்காட்டல் :—

ய. மீர் விருகன். ௫ = (10 மீர் விருகன் 5)—

அ. மீர் விருகன். ௪ = (8 மீர் விருகன் 4)—

எ. மீர் விருகன். ௫ = (7 மீர் விவ. 5)—

சு. மீர் விவ. ௬ = (6 மீர் விவ. 9)—

க. மீர் விவ. ௫ = (3 மீர் விவ. 5)—

இதவுடனே வெள்ளிவிராகன் (௨௮) ௪ (4) - ஏகமாய் உறுக்க எத்தனை மாத் துக்காணு மென்னில் :— மாத்துநிறையும் மினத்துக்கினம் மாறிப்பெறுக்கி ன்; துகையை பொன்னிடையுடனே வெள்ளி இடையுங் கூட்டின; துகைக்குக் குடுக்கிறதாவது :

யரு ௫ரு மாற : ௫ய = (10 × 5 = 50)—

அரு ௪ரு : ௫ய = (8 × 4 = 32)—

எரு ௫ரு : ௫ய = (7 × 5 = 35)—

சுரு ௬ரு : ௫ய = (6 × 9 = 54)—

௫ரு ௫ரு : ௫ய = (3 × 5 = 15)—

ஆக துகை = ௫ய = 186)—

இதை யிடையாகிய (௫-௪-௫-௬-௫) = (5+4+5+9+5) ஆக துகை உயி = (28) ம். வெள்ளி விருகனிடைய - ௪ - (4) ம் கூட்ட ஆக ௫ய = (28+4=32) ருக்குடுக்க ஈயவு ௫ய = $(\frac{186}{32} = 5\frac{13}{8})$ = (ஐந்தேழுக்காலே வீசம்) — ஆதலால் :— ௨௮ (மாத்து ௫ய) = $(5\frac{13}{8})$ ல் என்பது :—

வேறு :—

அ (8) மாத்தில் ௫ய (30) களமுஞ்சு பொன் ஓடன் வைக்க - ௫ (10) மாத்தில் எத்தனை களஞ்சு பொன்காணுமென்றால் :—

முதல் - அ (8)ம் - ௫ய (30)ம் மாற - உாசய = (8 × 30 = 240) = இதை - ௫ (10) மாத்தில் குடுக்க :—

ஈயவு = உயி $(\frac{240}{10} = 24)$ கமுஞ்சு. ஆகையால் - ௫ மாத்தில் உயி (24) களஞ்சு பொன்னென்பது.

இன்னுமொருவகை :—

எ. மாத்தில் - மரு களஞ்சியம் = (7 மாத்தில் 15 களஞ்சியம்); கூஇழு மீல் உயி-களஞ்சியம் = [(6 $\frac{5}{8}$ ல்) மாத்தில் (20) களஞ்சியம்;] - ருத (5 $\frac{3}{4}$) ல் மாத்தில் - ம (10) - களஞ்சியம் - ஓடன்கைக்க - அ (8) மீல் எத்தனை களஞ்சி பொன் காணுமென்றால் :— மாத்து மிடையுமொன்றுக் கொன்றுமாற

எறு. மரு : மரு = (7 × 15 = 105) —

கூஇழு. உயி : மருமஉது = (6 $\frac{5}{8}$ × 20 = 132 $\frac{1}{2}$) —

ருதரு. மரு : மருமது = (5 $\frac{3}{4}$ × 10 = 57 $\frac{1}{2}$) —

ஆதுகை - உமாகுமரு = (295). இதனை பிற்கண்ட - அரு (8க்குக் குடுக்- நயவு - நடுகனாது = (2 $\frac{9}{8}$ = 36 $\frac{1}{8}$) — ஆதலால் :— ஓடன் வைத்த விருசன் சுமரு - சண்ட விருசன் - நடுகனாது (36 $\frac{1}{8}$) என்பது.

ஆசிரி விருத்தம் :—

வன்னமிகு மொன்பதேகால் மாத்திவிடையன்றி

வருகின்ற பொன்னுடனே வங்கமோறும்—

காசுடைக் கட்டியுறுக்கிடி-வழுவாமல் வருமாத்தமே

என்னவெனில் (விரா) கன்முக்காலுமே உந்திது லுற்ற

கணக (?) நிரையை இயம்பவே முன்மாத்தினுக்கே

குறைஇதனிலறை ஒன்றாமென அன்னதனைமுதலாக—

வைத்ததன் - அறைகின்ற மாத்தினுடனே—அடவான

வெள்ளியி னி றையதனைமாறி ஒன்றறைக்கணக்கியவே

தான்முன்ன வருமீவகை பொன்னிறையாமென்று

மொளியன (லா) - மென உறைத்தார் முதருகையாவு -

(மி) ப்பொன் கணக்கின்படி மூ தண்டமாகஉறையே = (23) =

என்பது :—

குவ (9 $\frac{1}{4}$) ஆகிய மாத்தில் சிறிது பொன்னில் - கா (6) விருகலிடை வெள்ளி கூட்டியுறுக்க - எது (7 $\frac{3}{4}$) மாத்துக் கண்டால் பொன்னிறை யெவ்வள வென்னில் :—

முன்மாத்து - குவ (9 $\frac{1}{4}$) ல் பிற்கண்டமாத்து எது (7 $\frac{3}{4}$) லும் போக நீக்குகை -

கஇ (1 $\frac{1}{2}$) யும் முதலாக நிருத்தி - பின்னண்ட எது (7 $\frac{3}{4}$) யும் வெள்ளி கிறை-

சு (6) ம் மாற - சகஇ (46 $\frac{1}{2}$ = 7 $\frac{3}{4}$ × 6 = 7.75 × 6 = 46.5) இதனை முதலாக

நிருத்தி - கஇ (1 $\frac{1}{2}$) க்குக் குடுக்க நயவு - நடுக = (46.5 / 1.5 = 31) ஆதலால்

பொன் (கிறுகன்)—நடுக (31) என்பது—

கூ	ஸ்	விராகன்	கூ	=	(6 மாத்து விராகன் 6)
எ	செ	செ	எ	=	(7 செ செ 7)
அ	செ	செ	அ	=	(8 செ செ 8)
கூ	செ	செ	கூ	=	(9 செ செ 9)
ய	செ	செ	ய	=	(10 செ செ 10)

சிறிது வெள்ளியும் கூட்டியுறுக்க - எஇ (7½) மாத்துக்கண்டால் - கூட்டின வெள்ளி யெத்தனை யென்னில்:—

இனத்துக்கு (ம்) மாத்துக்கு (ம்) நிறையும் மாற:—

$$\text{கூ ரு. கூ : கூயக} = (6 \times 6 = 36)$$

$$\text{எ ரு. எ : சயக} = (7 \times 7 = 49)$$

$$\text{அ ரு. அ : கூயச} = (8 \times 8 = 64)$$

$$\text{கூ ரு. கூ : அயக} = (9 \times 9 = 81)$$

$$\text{ய ரு. ய : ஈ} = (10 \times 10 = 100)$$

அது எ - கூகூ = (33) இரகன் - மாத்து - எஇ (7½) ரு குறிக்க சயவு - சயச = (44 = 330 ÷ 7½ = 330 ÷ 1½ = 330 × ⅔ = 660) ∴ செ = 44 முன் கூட்டியுறுக்கின அஞ்சவகைப் பொன்னும் (உடைய) விராகன் - சய = (40-ம்) போக நீற விராகன் - ச = [(செ 44—3—7—3—9—10) = (44-40)] = 4 ஆதலால் - கூட்டின வெள்ளி விராகன் ச (4) என்பது.

$$\text{கூ மாத்தில் விராகன் ய} = (6 மாத்தில் விராகன், 10)$$

$$\text{எ செ செ ய} = (7 செ ஸ் 10)$$

$$\text{அ செ செ ய} = (8 செ செ 10)$$

$$\text{கூ செ செ ய} = (9 செ செ 10)$$

$$\text{ய செ செ ய} = (10 செ செ 10)$$

இதனுடனே மாத்தறிபாமல் - அ (8) விரு. (விராகன்) பொன் கூட்டியுறுக்கி கண்ட மாத்து - அ (8) ஆதலால் மாத்தறிபாப் பொன்னுக்கு மாத்து எத்தனை யென்றால்:—

மாத்தாகிய-கூ-எ-அ-கூ-ய ஆக சய = (6 + 7 + 3 + 9 + 10 = 40) இதைக் கண்டபாத்து - அ (8)ல் மாற:—

$$\text{கூகூய} (40 \times 8 = 320) \text{ நிகுத்தி—}$$

மாத்துக்கும் பொன்னுக்கும் மாற:—

$$\text{கூருயிரு மாற: கூய} = (6 \times 10 = 60)$$

$$\text{எ செ யசெ: எய} = (7 \times 10 = 70)$$

$$\text{அ செ யசெ: அய} = (8 \times 10 = 80)$$

$$\text{கூ செ யசெ: கூய} = (9 \times 10 = 90)$$

$$\text{ய செ யசெ: ஈ} = (10 \times 10 = 100)$$

ஆறுகை = சா = $(100 + 90 + 80 + 70 + 60 = 400)$ ல் முன்னிறுத்
 தின-நாஉயி (= 320)ம் போக நீக்கு = அயி = $[(400 - 320) = (80)]$
 இதை மாத்தையாத-விருகன்-அ (8)க்குக் குடுக்க ஈயவு-யி = $(\frac{80}{8} = 10)$
 ஆதலால் :—

யி = (10); யீல் (மாத்தில்) என்பது.

(வேறு)

ஒரு ராசாவிவிடத்திலே ஒரு சேவு(வ)கனுக்கு தீனம் ஒரு விருகன் சம்பளம், அந்த
 சேவகன் எந்த வேளையில் வந்து சம்பளம் கேர்ப்பானோ அந்த வேளையில்
 சம்பளங் குடுக்கிறதனுலே:— ஓர் வருஷத்துக்குச் சம்பளம் பந்து மோதிர
 மாகச் செய்யப்பாட்டு:—

கட்டளைக் கலிப்பா :—

ஆண்டுதொனொரு முன்னூற்றறுபது வான

நாளின்படி கட்டளையில்—வேண்டுமோதிதம் பத்தில்

முன்னூறுடன் விருகன்றானிறுமுப்பது

வேந்தனு மறண்டு கொண்டனன்

ஒன்றுமிரண்டும்—புகலுமுன் (மு) முன்றது நாலுடன்

பத்துமாய்க்கண்ட னுலஞ்சமாகு மெட்டஞ்சம்கூர

(நாரு) நூத்தண்பலுமீயவே—அப்பால் ஒருமா
 ஸைதசரி அஞ்சமோதிரம்—“(24)”

விருத்தம்:—

நாப்பதுநாள் (நாங்ப்பத்துநாள்) சேவித்தோன் தனக்குத்தாலும்—

முகியாமலாறைந்து முறைமையாக—

செப்பமுடனினிந்த (நின்த)விதம் பேசுதிமமாக—

மோதிரத்தை அஞ்சேசேரீர்—

ஒப்பமுடனென்று ரெண்டுநாலுமெட்டும்—

உகந்ததொரு பதினஞ்ச முகந்தேசெய்யில்—

எப்பவந்து சேவித்தோன் கேட்டானானால்

ஈப்பலாம் மோதிரத்தை யென்றுந்தானே = (25)

கட்டளைக்கலிப்பா :—

மன்னனுக்கு மன(னை)வியர் மூவர்கள்மைந்தனன்

வாதான வெள்ளறிக்கனி—அன்னவன்தான்

(அன்னவன்றான்) மூன்று கூறுக்கியே—

(அளித்தானதனை) அளிதள்ளதனையாக

யொன்றதிகமே இன்னவா ரந்த

மூவருமே செயிலிருந்த மீதியிரைவன்—

சரிபிடில் முன்னலந்தகனியறு னுன்குடன்—

மொளியவொன்றென மூதறிவோர்களை = (26)–

கொச்சகம் :—

மத்தகசம் பத்தினுக்கே மருவிய பொன்ன (ணை) சேர்த்தும்
பரிபண(ம்) பத்தஞ்சுதனக்கே—
நாலுபத்துட னென்றேகால்—
பணந்தகரென முந்தினுக்கே—
உத்த இருநான்கும்—

முக்காலும் வேணபரபணமு நூறே = (27)

கொச்சகம் :—

தித்திக்கும்பூசனிக்காய் செப்பியபத் தொன்பதுக்கே—
உத்த தொண்ணுத்தஞ்சு
வருவது மொன்றினுக் கொன்றுகுவுமே
கைத்திருக்கும் பாகக்காயி—
யென்பதோர் நாலு(ம்) பெத்தஉருவும்
நூறு—பெருங்காசு நூரதாமே = (28)

கொச்சகம் :—

சுவாலி சேரினங்களின் பல
நீலோபுள்ளினமாய்த—தாவியிருக்கையி
தமுதானொன்றுக்கில்லாதால் மே(வி)லி எஞ்ஞது—
புட்டான மென்ற
வாக்குரெண்டாகி எருவியருநென்று—
குணு புளக்கானமாகியதே = (29)

கொச்சகம் :—

தொண்ணூறு பலர்த்துருவை இருநான்குடனேயென்னறிய
மெ(மே)தி இரண்டுமேதான் சிரக்க அண்ணலே
பாலொன்றறை மூன்றுநாலுக்கு (கெ)லாம்வண்ண
மெனவே கவிஞரும் வகுத்தபடி தானிதுவே = (30)

என்பது :—

பசவுக்குப்பால்படி - க = (1); ஆட்டுக்குப்பால்படி - இ = ($\frac{1}{2}$); எறுமைக்குப்
பால்படி - ஈ = (3) ஆக உருவும் - நூரு - பால்படியும் நூரே =

கொச்சகம் :—

சனகையுடன் னூலாறு கொண்டகாசிபடிதான்
துலாவெ (வொ)ன்றினுக்கே—
தவருமலாறைந்து பண்மதாக—
பரிசுமுந்தான் வித்தவணிகனிடமே—

அங்கொருவனேகியோர் பதினாறுகாசிடையான

படியென துலாநீயருளென ஓ(?)முதலியே(?)

பொருள் கொ(ள்)ளும் வகையினை யடவாகவுரை செய்கவென-

பொங்கமுட(ஐவ)யைந்து துகையென்றிரிந்தே முன்பொருந்திய-
விரண்டு முதலாய்ப் போக ஒரு மூன்றாயும்-

மாரியதன் முன்னம் புகல்வதற்க் கீய்வோன்-

இங்கிதமதாகவே வந்தொருவன்

பெற்றயிதின் விலையெனத்தொகுப்பீர்

என்னபடி வருகினுஞ் சொன்னபடியாகவே-

நய்வர் காணிக்கர் தானே = (31)

இது விரித்துக் காட்டல் :-

உயிச (24) காசிபடியால் துலாம் - க (1)ரு - ந(பொன்) (நய = 30 பணம்)

ஆ-யசு (16) (காசி) படியால்-துலாம்-அ (8)ரு யெத்தனை என்னில் :-

உயிசம்-க-ம் மாற = உயிச = (24 × 1 = 24)-என்று நிறுத்தி-யசு-ம்-அ-ல்

மாற-நாஉயிசு = (16 × 8 = 128). இது உடனே நய = (30)ம்

பெருக்க=நய அசய = (128 × 30 = 3840) இதை முன்னிருத்தின-

உயிச (24)ருக் குடுக்க நயவு-நாசய = $(3840 \div 24 = \frac{3840}{24} = 160)$

இதை பொன் படுத்த - யசு = $(\frac{160}{10} = 16)$ (பொன்) என்பது--

பணவிடை அ னு (8 $\frac{3}{4}$) கொண்டது விருகன்-க (1)

பணவிடை-யஉஇ (12 $\frac{1}{2}$) கொண்டது களஞ்சு-க (1);

களஞ்சு ஒண்ணுக்கு மஞ்சாடி உய - ய (20 - $\frac{1}{10}$)

பணவிடை-க (1)ரு மஞ்சாடி - க இ லி = (ஒன்னறை யேரண்டுமா)

= $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 1 + 0.5 + 0.1 = 1 + 0.6 = 1\frac{3}{5})$;

விரர்கள் ஒண்ணுக்கு-மஞ்சாடி-யசு = (14)--

விருத்தம் : = (32) =

சதிரத்தை நாத்தித்து தானவெண மெவாயால்-

திராயமொளிர்த பொருளை துதி செ(சே)ரும்

முந்திறி வாயில் களிப்பெணவும்

கா னுமே-இந்த விசளப் பிரப்பு = (32).

என்பது :-

ஐ ரு ஐ = முக்காலுக்கு முக்கால் எத்தனை யென்னில் = $(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = ?$

எனில்) :-

ஐ (= $\frac{3}{4}$ = முக்கால்) சதிரம் - சுய = (60) இதைச (4)ல் மாற :-

கா. ச: உாசய = $(60 \times 4 = 240)$ இதை ஐ ($\frac{3}{4}$) லில் களிக்க = நாஅய =

$(240 \times \frac{3}{4} = 180)$; இதை ஐ (முந்தி = $\frac{1}{2}$) வாயில்களிக்க: -

இய = $[(180) \times (\frac{1}{320}) = (\frac{9}{16})]$ ஆதலால் தருண: இய = $(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16})$ என்பது.

இரு இ = $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = ?)$ எத்தனை யென்றால்:—

இரு சதிரம் - சய (40) = இதை ச (4)ல் மாற = சய. ச: ஈகய = $(40 \times 4 = 160)$ இதனை யரையி $(\frac{1}{2})$ ல் களிக்க - அய = $(80 = \frac{160}{2}) = 160 \times \frac{1}{2}$ இதனை முந்திரியி (வது) ல் களிக்க - வ - கால் = $(\frac{80}{320} = \frac{1}{4})$ ஆவதால்:—

இரு இ: வ = $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4})$ என்பது.

வருவ = $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = ?)$ எத்தனை யென்றால்:—

வ $(\frac{1}{4})$ ரு சதிரம் உய (20) இதனை - ச (4)ல் மாற - உய. ச: அய = $(20 \times 4 = 80)$ இதனை வ = (காலி = $\frac{1}{4}$)ல் களிக்க = உய (20) இதனை வது (முந்திரியி)ல் களிக்க - ய = $(\frac{20}{320} = \frac{1}{16})$ ஆதலால் வருவய = $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16})$ என்பது

இரு வ. $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = ?)$ எத்தனை யெனில்:— இ $(\frac{1}{2})$ ரு சதிரம்-சய (40); இதை ச (4)ல் மாற - ஈகய = $(40 \times 4 = 160)$; இதை காலில் கழிக்க சய = $(160 \times \frac{1}{4} = 40)$ —.

இதனை - வது $(\frac{1}{320})$ யில் களிக்க ஹு = $(40 \times \frac{1}{320} = \frac{40}{320} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8})$ அரிக்கால். ஆதலால்:—

இருவ: ஹு = $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \text{அரிக்கால்})$ என்பது.

வருய = $(\frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = ?)$ எத்தனை யெனில்:— வ $(\frac{1}{4})$ சதிரம் = உய (20) இதனை ச (4)ல் மாற-அய = $(20 \times 4 = 80)$ இதனை-ய = $(\frac{1}{16})$ வாயில் களிக்க-ரு $(\frac{80}{16} = 5)$ இதனை வது (முந்திரி = $\frac{1}{320}$)வாயில் களிக்க-ருவது = $(\frac{5}{320} = \frac{1}{64})$, ஆதலால்-வருய: ரு வது = $5 \times \frac{1}{320} = \frac{5}{320} = \frac{1}{64}$ = (காணிமுந்திரி அல்லது கால் வீசம்) என்பது.

சுருநி = $(\frac{1}{5} \times \frac{3}{20} = ?)$ யெத்தனை யென்னில் சுரு சதிரம்-யசு = $(\frac{1}{5}$ ரு சதிரம் = $\frac{80}{5} = 16)$; இதை ச (4)ல் மாற - கூயசு = (64). இதனை நி $(\frac{3}{20})$ ல் களிக்க - கூ இ பி = $9 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \times 9.6 = 9\frac{3}{5}$ இதை வது $(\frac{1}{320})$ ல் கழிக்க - சு வது கூ இ பி = $9\frac{3}{5} \times \frac{1}{320} = \frac{86}{3200} = \frac{3}{100}$ ஆதலால்:— சுருருநி: சு வது கூ இ பி (அதாவது நாலுமா $(\frac{1}{5}$ வுக்கு முன்றுமா $\frac{3}{20})$ = $(\frac{1}{5} \times \frac{3}{20})$ ஆவது அறைமா கீழ் அறையிருமா = $\frac{3}{100} =$ நூறில் முன்றுமங்கு = 0.03 என்பதாம்—.

நீரு ஷு ($\frac{3}{16} \times \frac{1}{8} = ?$) யெத்தனை யெனில் நீ-சதிரம் = ($80 \times \frac{3}{16} = 15$)
 யிரு; இதனை ச-(4)ல் மாற-சய ($15 \times 4 = 60$), இதை-ஷு ($\frac{1}{8}$)லில்
 கழிக்க-எ இ = $\left\{ (60 \div 8) = (7\frac{1}{2}) \right\}$ இதனை முந்திறி ($\frac{1}{320} =$ வது)
 வாயில் கழிக்க-உ ரு வதுகூ இ = $\left[\left(\frac{1}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{640} \right) = \right.$
 $\left. (7\frac{1}{2} \times \frac{1}{320} = \frac{75}{6400} = \frac{15}{1280}) \right]$ ஆதலால்:— நீ-ரு ஷு ரு - ரு வதுகூ இ
 ($= \frac{15}{640}$) என்பது—.

நீரு.ப = ($\frac{3}{20}$ ரு $\frac{3}{20} = \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = ?$) யெத்தனை யென்னில்:—

நீரு சசிரம் ($80 \times \frac{3}{20} = 12$) = 12 - இதை ச (4)ல் மாற-சயஅ =
 ($12 \times 4 = 48$) - இதை ப ($\frac{1}{20}$)ல் கழிக்க - உ வரி ($\frac{48}{20} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$)
 இதை வது ($\frac{1}{320}$)யில் களிக்க - (ருகூ வரி).

ஆதலால்:—

நீரு ப = ருகூ வரி = $\left[\left(\frac{12}{5} \times \frac{1}{320} = \frac{12}{1600} \right) = \left(\frac{3}{400} \right) = \left(\frac{3}{20} \times \frac{1}{20} \right) \right.$
 $\left. = \left(\frac{3}{400} \right) \right] = \left[(ருகூ வரி) = \left(\frac{1}{160} + \frac{1}{1280} + \frac{1}{6400} \right) \right.$
 $\left. = \left(\frac{40 + 5 + 3}{6400} \right) = \left(\frac{48}{6400} \right) = \left(\frac{3}{400} \right) \right]$ இதற்குப் பெயர் -
 (அறைக் காணியே கீழ்க் காலே மும்மா) = (ருகூ வரி) என்பதாம்:—

விருத்தம்:—

ஒருவன் பேரில் நானுத்திருமெளுத்தை

யென்னில், வரும் பொருளைத் தன்னில் மாறி-

மது மல்லினத்தி நால(லை)த் தாக்கி-

பெருமையா மெளுத்துக் கீய விரைந்திம்

ஒருவன் பேரை - அருமையாம்

விசாலமென்னும் மறிந்திடு மியல்பு தானே = (33)

விரித்துக் காட்டல்:—

ஷு ரு ஷு ($\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = ?$) = அரிக்காலுக்கரிக்கால் எத்தனையென்றால்:—

ஒருவன் பேரு முத்தன். எளுத்து நாலு. (ச = 4) இதை-(ஷு = $\frac{1}{8}$)-வாயில்
 மாற-இ = ($4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$) இதை மருத்தும்-ஷு ($\frac{1}{8}$)ல் மாற-ய = ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$)
 இதை பேரெழுத்து-ச-(4)க்குக் குறிக்க ஈயவு-உ வது = $\left[\left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{128} \right) = \right.$
 (காணி முந்திறி) = $\left(\frac{1}{80} + \frac{1}{320} \right) = \left(\frac{4 + 1}{320} \right) = \left(\frac{5}{320} \right) = \left(\frac{1}{64} \right) \right]$
 ஆதலால்-ஷு ரு ஷு : உ வது = $\left[\left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \right) = (காணிமுந்திறி) \right]$ என்பது.

பீ ரு பீ: ($\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ ரு = ?) எத்தனை யென்னில்:—

ஒருவன் பேர் வீரன்:--

எடுத்து - ஈ = (3). இதை - ஐ ($\frac{1}{10}$)ல் மாற = வப = $[(\frac{1}{4} + \frac{1}{20}) = (3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10}) = (\frac{5+1}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10})$ - மத்தும்-ஐ ($\frac{1}{10}$)ல் மாற-

சு வது கீஇஐ = $[(\frac{1}{40} + \frac{1}{320} + \frac{1}{640} + \frac{1}{3200}) = (\frac{80+10+5+1}{3200})$

= $(\frac{96}{3200}) = (\frac{6}{200} = \frac{3}{100})$] இதை எடுத்து ஈ (3)க்குக் குடுக்க:--

சுய-பி வது கீசு = $[(\frac{1}{160} + \frac{1}{300} + \frac{1}{1600}) = (\frac{10+5+1}{1600})$
= $(\frac{16}{1600}) = (\frac{1}{100}) = (\frac{3}{100} \times \frac{1}{3})$].

ஆதலால்:--

ஐ ரு ஐ = $(\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}) = (\text{பிவது கீசு})$ என்பது.

மத்தும் வந்தன வெல்லா மிப்படிக்கண்டு சொல்லவும்--

ஆசிரு விருத்தம்:--

ஐரண்டுள்ள மூணுநீளமொடு நான்குமே

யறைகின்ற சீலையதொன்றுக் காண்பணமொன்பது--

விலையாகு, மஞ்சமுளமகல முடனீட்சியே

தான்செய்ய முளமுள்ள மூவஞ்சுகொண்டசீலை

நறைந்து தெரியவிலை காணவே செப்பிவரும்

அகலமுந்தனைமாறி-நீள(ள்)மையில்(ர்ச்) சொ(சேர்)வதாக்கி

யெ(யொ)ன்றில் அய்யமில்லாம(ல்) நீர்மாரு முதலாகுமே

பின்னறைகின்ற ம(வ)கலமதுவுமப்படி நினைந்து

மிக்கானதுடன் மாறியே அன்னதற்கீயுமெனவே--

வைய்யம்புகள (மு) வரும் காணிக்கர்முன்னவே

வகுத்துரை தொகுத்தினையே மணமாணர் மாமதுக்குண

மாணலலெண் (ண) வரும் வாரு கண்டு கொள்ளலே:-- (34)

இதை விரித்துக் காட்டல்:--

ய (10) முள நீளத்தில்-சு (4) முள அகலத்தில் சீலை-க- (1) ரு விலை க (1) பணம் ஆ. அஞ்ச (5) முள அகலத்தில் - பதினஞ்ச முள (15 = முள) நீளத்தில் சீலை-ய (10) ரு விலை யெத்தனை யென்னில்:--

அகலமாகிய நாலும் தன்னை மாற - ச- ச: யசு = $(4 \times 4 = 16)$ நீளமான - ய (10) மாற ஈகய = $(16 \times 10 = 160)$ சீலை க - (1) ல் மாற = (ஈகய) = $(160 \times 1 = 160)$; என்று முதலாய் நிருத்தி:--

பின்னகல மஞ்சம் தன்னை மாற:—

ந. நு: உயிரு = $(5 \times 5 = 25)$ - லிரு (15)ல் மாற - நாளயிரு $(25 \times 15 = 375)$.
 சீலை - லு = (10)ல் மாற - நூலாளயிரு = $(375 \times 10 = 3750)$ இதை முன்
 னிருத்தின - னாசுலு = (160) ருக்குமிக்க ஈய்வு உயிரு (பணம்) சவரூ =
 $[(3750 \times \frac{1}{160}) = (23\frac{7}{16}) = (23. பணம் - 4\frac{3}{8})$ (இங்கு ௨௨ $\frac{7}{16}$ ஐ
 10ல் பெருக்க $\frac{70}{16}$ ரு வந்தது $4\frac{3}{8}$)] என்பது.

விருத்தம்:—

அகலமொரு நான்கும் கனமிரண்டு

நீளமா மிரண்டுடசான்

முளக்கல் லொன்றுக்கே - பகரில்விலை

பொன்னிரண்டாம் கல்மாருப கர்ந்ததன்

னன்கு மிருவதுவாம் - நீளமத்தகைமை

யறுசிலையிரண்டு விலையே தென்னில்

சாத்தியமுத்துகை நான்குந் தனிலேமாறி

நிகரில் முதலாகவு (ம்)

பின்னைந்துதாக்கி நின்ற

முதற் கிபந்து-பயனிகழ்த்து வீரோ:— (35)

விரித்துக் காட்டல்:—

சு (4) முள அகலம் - [உ (2) முளகனம்] ரெண்டுமுளகனம் - லு (10) முள நீளத்
 தில் கல் - க = (1)ரு - பொன் உ (2) விலை ஆக—சு (6) முள அகலம் - சு
 (4) முளகனம் - இருவது முளநீளம் - கல்லு ரெண்டுக்கு விலை யெத்தனை
 யென்னில்:—

சு (4) ம் - [உ (2)ம் மாற அ = $(4 \times 2 = 8)$ - இதை நீளம் - லு (10)ல் மாற-
 அலு = $(8 \times 10 = 80)$ இதை கல் - [க = (1)] ல்மாற அலு =
 $(80 \times 1 = 80)$. என்று. நிருத்தி:—

சு - ம் - சு - ம் - மாற - உயிசு = $(6 \times 4 = 24)$ - இதை நீளம் - [உலு = (20)]ல்
 மாற = சாஅலு = $(24 \times 20 = 480)$ இதைக்கல் - உ (2)ல் மாற கூாசுலு =
 $(480 \times 2 = 960)$ இதை பணமாகிய - உலு = (20)ல் மாற = லுகூஉலு =
 $(960 \times 20 = 19200)$ இதை முன்னிருத்தின - அலு = (80)ருக் குமிக்க
 ஈய்வு விலை உலிசு - பொன் ஆதலால்:—

உலிசு பொன் = $[(\frac{19200}{80}) = 240]$ இதைஒரு பொன்பணம் 10ல் வகுக்க வேற்படும்
 பொன்னுக்குச்சமம் = $(\frac{19200}{80 \times 10} = \frac{19200}{800} = 24 = \frac{240}{10})$]
 = 24 (பொன்) என்பது:—

விருத்தம்:—

உன்னிதமா முளப்படுத்தாட உன்னுஞ்

உற்றகன். மூன்றாக வுயி(ய) ர்ந்தகல்லை

அன்னியமாய் நீளமறை—அகலந்தாலும்

அவ்வடைவே கனமு முறவதுவேதென்னில்:—

சொன்ன முழந்தனைச் சாணய்த்தொகுத்து மாறித்

தோண்டுகல்லு விரலாமுத்து கையைத்தாக்கி

பின்னிரையில் விர(லா)வாக்கிமூன்று - பெருக்கி

யிவர்க்கீய்ந்து - துகைபேசவிரே = (36)

என்பது:—

விரித்துக் காட்டல்:—

ய (10) முள நீளத்திலே - ச (4) முளவகலத்திலே க (1) முளக்கனத்திலே - கல்
(க=1) இதை அறை முளநீளம் அறைமுள அகலம்-(இ=½) அறை முளக்
கனம் - துண்டுபண்ண யெத்தனைத்துண்டு காணுமென்றால்:—

[ய = 10] முளத்தைபுஞ்சாண்படுத்த = (உய) = (10 × 2 = 20), (ரண்டுசாண்
ஒரு முழம் வீதம்) ச (4) முளத்தைபுஞ்சாண்படுத்த - அ = (4 × 2 = 8)
இதனுடனே - உய (20) ஐ மாற - ஈசய (8 × 20 = 160) - என்று வைத்து:-

கனம் முளம் - க (1) க்கு சாண் = உ (2) - சாண் - க (1) று விறல் = யஉ (12)
ஆ விறல் = உயச = (12 × 2 = 24) இதை முன்னிருத்தின-ஈசய
(160)ல் மாற ஈசயாசய = [(160 × 24) = (3840)] இதனை (க = 1)ல்
மாற-ஈசயாசய = (3840) என்று நிருத்தி:—

நீளம் முளம்-(இ = ½) று சாண் (க = 1) று விறல் = (யஉ = 12). இதனைக்
கல்முளம் (இ = ½) று சாண் (க = 1)ல் மாற-(யஉ = 12). இதனை
முன்னிறுத்தின - ஈசயாசய (3840)க்குக் குடுக்க ஈயவு = [(ஈயஉய)
= (3840)
(12)] = (320)]. என்பது.

முந்தியி முதலாய் ஒன்றின்வறை துகை மொளிய வென்னில்:—

விருத்தம்:—

வந்திடு மொன்றே முன்னி

திருவதாய் வருத்துதற்கே

சுந்தரமாகுற்றினச்

சுருக்கத்தைப் பெருக்கிமானே-

சுந்த முந்தியியில் வைத்தே

செப்புநீ இவை கடனே = (37)

வது (முந்திறி) முதலாய்க-வறைக்கும் (முந்திறி முதல் ஒன்று வறைக்கும்)
 $= \frac{1}{3 \frac{1}{2} 0}$ முதல் 1 வறை) பெத்தனை பென்னில்:—

(க)மு-வது-நாடயி (ஒன்றுக்கு முந்திறி பென்பது முன்னூற்றியபத்தில் ஓர் பங்கு
அதாவது இதன் $= \frac{1}{3 \frac{1}{2} 0}$). ரெற்றினச் சுருக்கந் தாக்க-ருய-க-சு—நாசுய-
இதை - வது-ல் களிக்க — நாசுய - இ - \therefore வது-முதல்-க-வறைக்குந் துக்கை-
நாசுய இ $= (160 \frac{1}{2})$ என்பது:—

கட்டளைக் கலிப்பா:—

ஒரு பத்தே யடி ஓடி பின்னூறினிலுற்ற
மீளுங் குதிறைக்கே தான் விலை—
தருவாஞ்சுபொன்-னெட்டடியோடியே
தருகியஞ் சடிமீள பரிக் கேத்தபொன்-
(வளுத்துவதே தனில் முன்மொளி ரெண்டொன்றாய்
வைத்த பின்னு(தா)தம்படியாகவே அருமையாம்)
பொன்னுடன் மாறி முன்னவர்க்
காணுமிய்வை யறைந்திடவேணுமே $= (38)$

யி (10) அடி ஓடி-சு (6) அடி மீளுகிற குதிறைக்கி விலை 10 பொன் $= (5$ பொன்)
ஆ - அ (8) அடி ஓடி-10 (5) அடி மீளுகிற குதிறைக்கி எத்தனை
பொன்னென்னில்:—

யி (10)ம்-சு (6)ம்-யிசு (16) என்று நிருத்தி-பின்-அ (8)ம்-10 (5)ம்-யிசு $= (13)$.
இதை அஞ்ச (5) பொன்னுகிய- $(5 \times 10) = (50) =$ ரூய-ல் மாற கூருய
 $(13 \times 50 = 650)$. இதை முன்னிறுத்தின - யசு (16)ருக்குக் குடுக்க
நய்ய சயிஇடி $(= \frac{0 \ 5 \ 0}{16} = 40 \frac{5}{8})$ ஆதலால் நார்பதரையேரிக்கால் [(சயிஇடி
 $= (40 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}) = (40 \frac{5}{8})$]. பொன் என்பது:—

விருத்தம்:—

கந்தகம் வெந்தணலாயம் கருது நூத்திருவதுக்கே
வந்ததொருபலமதாக மருபடியடி சாலத்தந்திடும்—
படியொ(யோ)றைந்து-தாத்திராலன்று (திராலன்று)
மூன்று-உந்திய நலமுமேழு (வொ) மொன்பது
மென்பதாமே— (39)

கொச்சகம்:—

நாலொன்ம (ப) தாங் குன்றை
நவிலுமதி நவ்வளவும்—ஏலுவையிற்பாதி
எற்றந்த பாதியனுகல
முன்னுறைத்த குரு
(க)கொன்றுமே கூடச்சா(ல்)லு
நூருனதென்று சாத்தியது மெய்யாமே $= (40)$

வெண்பா:—

பத்துமதிஞடையப் பார்வேத்தன் கோட்டைக்கி

வைத்தமதினிட (யி) லே வாசலாம்—

அத்திரீர்—உண்ணும் போதேகில்—

(ஒன்று) ஒண்ணுமுதல்ப்

பத்தளவு மென்று

நீரே மாண்டிருந்து = (41) என்பது.

முதல் வாசல்வரைக்கும் யானை-உதடுநாடய (2520) என்பது—

வெண்பா:—

கன்னல்மொளி ஒன்பான்காசு துவமேயாகத்

தின்னவர்கள் (ளெ) ன்னவிலை செப்பவே—

கன்னல்மொளி (ஒரொன்பதென்பதின் படியடி)

த்துகையதற்கே - ஒரொன்பதை ஈய்த்துறை = (42)

என்பது.—

க (1) முதல் கூ (9) வரைக்கும் படியடித்துகை-சயிடு = (45) - இதற்கு - கூ (9) குடுக்க ஈயவு (சய = $\frac{9}{15} = \frac{1}{5}$) ஆதலால்:—

கொளுத்தாடைக்கி [அ = (8) = ?] தண்டுத் து (அதனடுத்த) மொளிக்கி—
இந்தப்படி மொளி (ழி) க்கு மொளி - சய (= $\frac{1}{5}$) அதியம் (அதிகம்) கூட்ட
கூக (9-9) சரி:—

விருத்தம்:—

நூருடனாமைமாறா(ற)னுவன்றிடு நூறுக்கிகதான்-

கூறியதானமூன்றாய் கொண்டிருவரைக்கும்-

ஆரிவினொன்று நீக்கலஞ்ச முன்னதுவையறித் தெரிய

வஞ்சத்தானம் செப்பிடிற் குளிப்பத(மா)மே = (43)

என்பது:—

நூ ரு ன எத்தினை (= $100 \times 100 = ?$) யென்னில்:— க - டி - ன - ஆ தானம் - ஈ
(3); மத்த நூறுக்குத் தானம் - ஈ (3) - ஆ தானம் - கூ (6) - க (1)
போக - நீ ருத்தானம் - டு (5) - நிருத்தி னூ. இனம் - க = (1), மற்ற
நூறுக்கும் இனம் (க) = (1); மாற - க - க - இதை நிருத்தி டு (5)
மட்டும் நடத்த:—

— க - டி - ன - கூ - டி - ஆதலால்:—

நூ ரு ன: டி கூ = ($100 \times 100 = 10000$) என்பது—

தாளிசை:—

நாலஞ்சனில்மாகாணி இவற்றெ (இவற்றே) வருலக்கம்—

நவமாகவேதன்னை - மாருவா நவியாவண

மிந்தக்கோல்(௦)சரி - வீசந்தன்னை—

மேல்கொண்டது சரியாய்க் குணமாமிருபத்துமே—
யதிலித்த வாக(வே)தாக்கி

யாவருசரிவளிமாதை

முன்னறிவாகிய வீசத்தைங்கா லொருவகை யென்று

கையன்றிமேலஞ் குலெனத்தானொரு—

வீசந்தனைமாறி வேண்டுந்துகை ஒன்றாகவே—

விளத் (விள்ளத்) துணிவீரே— (44)—

என்பது:—

யுகஜந- ரு யுகஜந- குழி = $(19\frac{1}{16} \times 19\frac{1}{16})$ ரு. குழி பெத்தனை யென்றால்:-
யுகஜந- $(19\frac{1}{16})$ யுடனே ய $(\frac{1}{16})$ கூட்ட— உய் $[(19\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) = (20)]$
உய. ரு உய: சா = $(20 \times 20 = 400)$ —ல் உய. ஓ: உஇ = $(20 \times \frac{1}{16} = 2\frac{1}{2})$
தள்ளி ய. ரு. ய: வதுகுவ = $(\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256})$ கூட்டி. நாககுவ இ வதுகுவ
= $[(397 + \frac{1}{2} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256}) = \{(397) + \frac{(640 + 4 + 1)}{1280} = (645)\}]$
= $(397 + \frac{1}{256}) = (397\frac{1}{256})$ என்பது.—

—(வேறு)—

கட்டளைக்களிப்பா:—

வட்டமனை நிலம் அளக்கும் வகைக்கு:— விபரம்:—

வட்டமனை நிலமளக்கும் வகை வள(ழு)த்துவேன்

காணிக்கா? முன்னாகவே தொட்ட கோலொரு

தூறுடனன் பதா (150)யத் தொகுத்த

கோலஞ்ச விச $(\frac{5}{16})$ ஐவிச)த்துளாக்கியே

இஷ்டமாகத்தனைத்தன்னில் மாறியே

யேத்த மாங்குளி இன்னவை யென்று தான்

சட்டமாயுறை வட்டமும் விட்டமே

சாற்று மூன்றொருனால் மாலை யெண்ணியே = (45)

ஷ. மூன்றொருனால் யா = $[(\frac{16}{5}) = (3 + \frac{1}{5}) = (3\frac{1}{5}) = (3\frac{2}{10}) = (3.2)]$

என்பது:—

வட்டமான நில மளக்குமிடத்தில் வட்டச் சுத்தளவு = 150 இதை
விட்டம் பண்ண — (வய) = $(\frac{5}{16})$ வாயில் களிக்க — $[(சயுகஜஹ) = (46\frac{7}{8})]$
= தூற்பத்தாரே முக்காலேக்கால் = $[(150 \times \frac{5}{16}) = (46\frac{7}{8})]$
இதைத்தன்னில் மாற — உதாரகுவ வதுவது = $[(2197 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})]$
= $2197 + \frac{(80 + 4 + 1 = 85)}{320} = 2197 + (\frac{1}{32}) = [46\frac{7}{8} \times 46\frac{7}{8}] =$
 $(\frac{140625}{64}) = (ஷ = 2197\frac{1}{32})$ இதை-ய- $(= \frac{1}{16})$ வாயில் கழிக்க —

$$\begin{aligned}
 \text{நாயுள் வயறுவது} &= [(2197 \frac{17}{64}) (\frac{1}{16})] = [(\frac{1}{16} \times 2197) + (\frac{17}{64} \times \frac{1}{16})] \\
 &= [(137 \frac{5}{16} + \frac{17}{1024})] = (137 + \frac{5}{16} + \frac{17}{1024}) = [(137) + \\
 &+ \left\{ \frac{(320 + 17) = (337)}{1024} \right\}] = [(137 \frac{337}{1024})] = \text{ஐ} [(137) + \\
 &(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{320})] = [(137) + \left\{ \frac{(80 + 20 + 4 + 1) = (105)}{320} \right\}] \\
 &= \left\{ (137) + (\frac{105}{320} = \frac{21}{64}) \right\} = 137 \frac{21}{64} = (137 \frac{337}{1024} = 137 \frac{21}{64}) \\
 &= (137 \cdot 328125)
 \end{aligned}$$

$(\frac{21}{64}) =$	(0.328125)	நயம் வித்யாசம் பலம்சமமே
$(\frac{337}{1024}) =$	(0.328125)	

$$\therefore [137 \frac{21}{64} = 137 \frac{337}{1024}]$$

$$\begin{aligned}
 \text{இதை வது } (\frac{1}{320}) \text{ வாயில் களிக்க - வநி சு வது கீ வயறுவது} &= \\
 &[(\frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{320} + \frac{1}{1280} + \frac{1}{5120} + \frac{1}{25600} + \frac{1}{102400})] \\
 &= \frac{(25600 + 15360 + 2560 + 320 + 80 + 20 + 4 + 1)}{102400} = \frac{43945}{102400} \\
 &= \left(\frac{8789}{20480} \right) = \left\{ \frac{1}{2 \cdot 330185 \frac{4035}{8789}} \right\} = (A).
 \end{aligned}$$

என்றாகின்றது:—

கேவலம் தமிழ் லக்க (பின்ன) மின்றியே கணிதத்தை நோந்தத்:—

$$150 \times \frac{5}{16} = \frac{750}{16} = \frac{375}{8}.$$

$$\left(\frac{375}{8} \right)^2 = \left(\frac{140625}{64} \right) = 2197 \frac{17}{64}$$

$$\frac{140625}{64} \times \frac{1}{16} = \frac{140625}{1024} = 137 \frac{337}{1024}.$$

$$\left(\frac{140625}{1024} \times \frac{1}{320} \right) = \left(\frac{140625}{1024 \times 320} \right) = \left(\frac{140625}{327680} \right) = \left(\frac{28125}{65536} \right);$$

$$\left(\frac{28125}{65536} \right) = \left\{ \frac{1}{2 \cdot 33017 \left(\frac{-3125}{28125} \right)} \right\} = (B) \text{ என்றாகின்றது.}$$

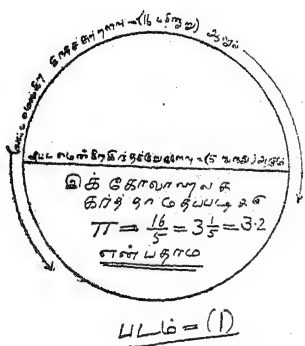
ஆதலால் இங்கு மேலே காட்டிய (A) க்கும் (B) க்கும் உள்ள தாரதமயம் களைப்புத்தியான்கள் அவசியம் ஆலோசிக்க வேண்டியதாகும்:—

ஆதலால்:— வட்டம் - ஈருய - ஈரு வ ளி சு வது கீ வ ய ழு து - ஈ - விட்டம் - ி
 (10) ஈ வட்டம் பெத்தனை யென்னில்:— ஈசு (= 3 $\frac{1}{5}$)ல் பெருக்கி. ஈயஉ =
 (32 = 10 \times 3 $\frac{1}{5}$ = 10 \times $\frac{16}{5}$ = $\frac{160}{5}$) என்று சொல்வது.

இனி இந்த வட்டமனை வட்டநிலம் அளக்கும் வகையில் சம்மந்தப்பட சில
 முக்கிய விசேஷங்களைக் கீழ்விலக்கும் விவரணத்தில் காண்க:—

இந்தக் கணிதப் புத்தகக் கர்த்தாவால் சமவட்டத்தைக் கொள்ள வேண்டிய
 யதற்கு:—

விட்டம் என்கிற குறுக்களவு 5 (ஐந்து) ஆகில் இதற்குரியச் சூ (ச்சுற்று)
 வட்டம் 16 (பதினாறு) என்றபடி கமைந்திருக்கிறது. இவர் சம்மதப்படிக்கு.



ஆகையால் தான் முன்னேயே விட்டம்-யி (10)
 ஆனால் வட்டம் - ஈயஉ (32) என்று கூறி இருக்
 கிறார். உதாரணங் கவனிக்க இது புலப்படும்.
 $\frac{32}{10} = 3.2 = 3\frac{1}{5}$ இதனால் விட்டம் - 1க்கு வட்
 டம் மூன்று டன் கூடிய நாலுபா என்பதை நன்கு
 விளக்குகிறார் உதாரணத்தில்.

(\therefore நாலுமா = சூ = $\frac{1}{5}$ = $\therefore 3 + \frac{1}{5} = 3\frac{1}{5} = 3.2$ என்பது.)

முதலில் கோடுகளைப்பற்றிய வறையில் கவனிக்க வேண்டியவைகளாவன:—

இந்தக்கணிதக்கர்த்தாவால் கேடித் (கி) விஸ்தரத்தை (விசாலத்தை =
 குழியை) ப்பற்றி வெகுவிஸ்தரமாக வர்ணிக்கப்பட்டிருக்கிறது, கணித மார்க்கத்
 தில் இதற்குப் பற்பல உதாரணங்களுங் காட்டியிருக்கிறார். நீண்ட சதுரச்சம்
 பந்தமாகவும், சமச்சதுரச்சம் பந்தமாகவும், இவ்வித விசாலங்கள் அடியோடில்லா
 மல் கேவலம் தீர்க்கமாக இருக்கும் கேடிதத்தைத்தான் கோடு (ரேகை) என்று
 சொல்வது உலக இயல்பு. இந்த ரேகைகள் இருவிதப்படும். ஸமமென்றும், வக்ர
 மென்றும்: ஸமமென்றால் நேருகப் போவதும், வக்ரமென்றால் (கோணலாக)
 வளைந்து போவதுமாகும்.

நேருகப் போகுங் கோட்டைச்சாரந்தவைகளே ஸமகேடிதங்களும், விஷம
 கேடிதங்களும்: இதற்குள் முக்கோண கேடிதம் முதல் பல கோண கேடிதங்
 கள் பர்யந்தம் இஷ்டப்படிக்கு அடங்குகின்றன.

வக்ரமாக (கோணலாக) போகுங் கோட்டை யனுசரித்ததுத்தான் வட்ட
 மனை, வட்டநிலம் முதலிய விருத்தகேடிதங்கள், இந்த வட்டத்தில் நீண்ட வட்ட
 மென்றும், பூர்ணச்சம வட்ட மென்றும், அறை முதலிய பலவித வட்டங்கள்
 உருவத்தில் வெவ்வேறு விதமாக நம்மால் காணப்படுகின்றது. துறவுகள்;
 வண்டிச்சக்கரம், பந்து முதலிய; வட்ட (கோல) இனத்தைச் சேர்ந்தவை
 களே.

இந்த வட்டச் சப்தமான விசாரங்கள், பூர்வகாலத்திலிருந்தே வெகு சூக்ஷ்மமாக; ஆர்யபட்டர், வாகமிகிர - சூரியன் வியாஸ் வஸிஷ்டர் - பாசார்முதலிய மகான்களால் தொன்று தொட்டு நன்கு விளக்கப்பட்டு வருகிறது:

இவர்களால் விட்டம் - (20000) ஆனால் வட்டம் (62832) என்று நிச்சயிக்கப் பட்டிருக்கிறது.

இவர்கட்கு விநோதமாக ஸ்ரீ தார் முதலிய கணித பண்டிதர்கள் விட்டம் ஒன்றான இதற்குச் சுற்றளவாகிய வட்டம் பத்தின்வர்க்கமூலம் $\sqrt{(10)}$ என்கிறார்கள்.

$$(10\text{ன் வர்க்கமூலம்}) = \sqrt{(10)} = 3.1623$$

$$\text{ஆர்யபட்டாதியர் வட்டம்} = 3.1416$$

$$\text{இவற்றின் வித்தியாசம்} = 0.0207$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(இந்தக் கணிதகர்த்தாவின் ஒன்றான)} \\ \text{விட்டத்தின் வட்டப் பரிமாணம்)} \end{array} \right\} = 3.2000$$

இப்படிப் பூர்விகர்கள் காலத்திலேயே விட்டத்துக்குரிய வட்டத்தைப் பல வித்தியாசத்தோடு வழங்கிக் கொண்டார்கள். ஆனபோதிலும் கணிதப்பலவருடைய - பாஸ்கர் முதலியவர்களால் விட்டம்-1-ஐ வட்டம் (3.1416) என்றே அங்கீகரிக்கப் பட்டிருக்கிறது. இந்த ($\pi = 3.1416$)ஐ யனுசரித்தே நவீனர்களின் கணிதங்களும் லாகரிதும் முதலிய நவீன அளவு முறைப்படிக்கு சூக்ஷ்மமாகச் சாதனஞ் செய்யப்பட்ட ஓர் விட்ட வட்டம் = (3.1415926535897932) = π .

இந்த விகித சாய்தத்தைக் கொண்டே த்ரிகோணமிதி முதலிய-வான கணித உபகரண கணிதங்களையும் கட்டித்தவருகிறார்கள். (கோலகணிதத்துக்கோ இந்த ஷெ. π தான் மூலதாயமாகும். இதுவின் மையங்கு, ஏதும் கீகழ்த்தவே முடியாது)— த்ரிகோணமிதியிலும் ஸ்பல (ப்லேன்) த்ரிகோணமிதி, சாப (ஸ்பெரிகல்) த்ரிகோணமிதி யென்று இருவிதம். இவைகட்குரிய கணித உபகரணங்கள்.

- (1) புஜஜ்யா = ஸைன் (SINE)
- (2) கோடிஜ்யா = காஸ் (COSINE)
- (3) உத்க்ரமஜ்யா = வர்ஸ் (VERSED SINE)
- (4) கோடியுத்க்ரமஜ்யா = குவர்ஸ் (COVERSED SINE)
- (5) ஸ்பர்ச்சரேகா = டான்ஞன்டஸ் (TANJENT)
- (6) கோடிஸ்பர்ச்சரேகா = கோடான்ஞன்ட (COTANJENT)
- (7) ஸ்பர்ச்சகர்ணம் = ஸீக்கன்ட் (SECANT)
- (8) கோடிஸ்பர்ச்சகர்ணம் = குஸீக்கன்ட் (COSECANT)
- (9) புஜஜ்யோஜ்யாகர்ணம் = கார்டு (CHORD)
- (10) கோடிஜ்யோஜ்யாகர்ணம் = குகார்டு (COCHORD)
- (11) புஜ; கோடி; கர்ண; கோலஸ்தி = வர்ட்டகல் (VERTEX)

என இப்படிப்பல அவயவங்களுள்ளவைகளாக இருக்கின்றன—.

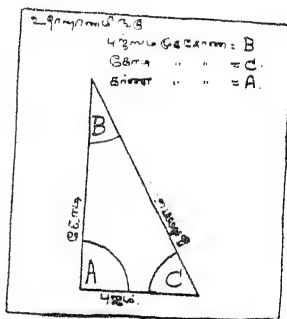
எப்போ ஓர் கர்ணம் ஏர்படுகிறதோ இதாகிற அறை விட்டத்தையுடைய ஓர் வட்டம் அவசியம் ஏற்பட்டேயிருக்கும். கர்ணமேற்பட்டபோது புஜகோடிகளு மிருக்க வேண்டியதாகிறது. இம்மூன்றவயவங்களும் தெரியும்போது இவை களின் பரப்பை ஸம்பாத, ஸம்முக, கோணங்களும் உண்டாகின்றன. ஆனால் இவைகளில் சில தெரிந்தவைகளும், சில தெரியவேண்டியவைகளுமாகவே இருக் கும். இதற்காகவேதான் ஸகலகணிதப்பரஞ்சுமம்.

மேற் கூறிய உபகரணங்கள் கேவல ஸரல சேதிர ரூபமான ஜ்யாமிதியில் அமையும் போது அந்த ஜ்யா முதலிய சப்தங்கள் போய்-கேவலம்-புஜம், கோடி, கர்ணம், ஸம்பாத, ஸம்முககோணம், என்ற இவைகள்தான் பெயர்கள் உடைய வைகளாக நிற்கின்றது. இந்தக் கோடுகளை அனுசரித்தே இதுவறையில் கிரந்த கர்த்தா கூறிவந்த நில அளவை வட்டம் முதலிய கணித விகிதங்களும்.

இப்படிச் கண்ட கோடுகளின் ஒரு பக்கக்கோடு புஜமும் இதற்கெதிர்க் கோடு கோடியுர், இவ்விரு நூனிகளின் ஸம்பாத சேர்க்கைக்கோடு கர்ணமும், ஆக அழைக்கப்படுகிறது.

இப்படத்தில் கண்ட $AC =$ புஜம், $AB =$ கோடி, $BC =$ கர்ணம், எனப்படும். எப்போதும் புஜகோடி களை விடக் கர்ணம் நீண்டும். கர்ணத்தை விடக் (கோடி புஜக்கூடல்கள் (கோடி + புஜம்) அதிகமாகவே இருக்க வேண்டியதாகின்றது நிபந்தனையே — இல்லை யேல் உருவமமைவதில்லை.) $\therefore (கோடி + புஜம்) >$ கர்ணம்.

இவ்வித உருவைச் சார்ந்த சில விசேஷ கணி தங்களை (இந்தக் கணிதக்கர்த்தாவால் விடப்பட்ட சில விசேஷங்களை), வட்டச் சம்பந்தமான கணிதம் முடிந்த பின்பு கூடியவறையில் வெகு சுருக்கமாகக் கூறுவோம். இவைகளில் விசேஷங் கள் வெகுவாயுள்ளன மாத்திரம் கணிதத்தில் காட்டப்படுகிறது.—



(படம் = 2)

நூதனக்கணித அளவுமுறைப்படிக்கு லாகரிதும் (காதாக்கம் = லகுரித்தம்) முதலியவைகளால் நவீனர்கள் ஏற்படுத்தப்பட்ட (π) யின் விகிதம் (3.1415926535897932) என்கிறபடிக்காகும்.

விருத்தார்யப்பட்டால் செய்யப்பட்டதும் பெளருஷக்கிரந் தங்கட்க்கே முதலாவதுமான நான்கு பாதங்களைக்கொண்ட ஆர்யபட்டியம் என்கிற மூல்கர்ந்தத்துக்கு ஒருவர் (விவாக்கியானம்) வெகு விமர்சன விஸ்தாரமுள்ள உறை செய்திருக்கிறார்.

இப்புத்தகத்தின் காப்பிதற்சமயம்: அடையார் அனிபெஸன்ட் லைப்ரரியில் தெலுங்கெழுத்தில் ஸம்ஸ்கிருத பாஷையில் ஓர் காப்பியும், தேவநாகரியில் ஸம்ஸ்க்ருத பாஷையில் ஓர் காப்பியும் ஆக இரண்டு காப்பிகள் இருக்கின்றன—முதலில் சொன்னது சிதிலமாயிருப்பதால் இரண்டாவதைப் புதிதாகக் காப்பியும் எடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. (அதில், உள்ள ஸம்ஸ்க்ருத பாஷைக்கு நேர் செய்த தமிழ்)

—அந்த உரைக்கு பாஷ்யம் என்கிறபெயர்—இதற்குக் கர்த்தா “நீலகண்ட ஸோம ஸுத்வா” என்கிற பேருடைபார். இவர், திருக்கணித கர்த்தாவும் ஆர்ப்பட்டிய மற்றோர்வயாக்கபான மாகிய படதீபிகா கர்த்தாவுமான ஸ்ரீபரமேசுவரஸார்யர் தனயன்; தாமோதரபண்டிதரின் சிஷ்யர், ஸ்ரீ குண்டம் என்கிற கிராமத்தில் வசித்தவர். கார்க்கோத்திரத்தில் பிறந்தவர், இவர் காலம் சுமார் A. D. (1450 to 1550) இந்த நீலகண்ட ஸோமஸுத்வா என்பவர் சொல்லுகிறார்:—

ஸக்தம கிராமத்திலிருந்வுறுகிய “மாதவன்” என்பவர் மிக்க சூக்ஷ்மத்துக் குச் சமீபமாயிருக்குந்தன்மை வாய்ந்த “பரிதி” (சுற்றளவைச்) சொல்லுகிறார் என்கிறார்:—

அப்படி அந்த மாதவன் என்பவர் சொல்லும் பரிதியளவோவென்றால்:—

இங்கு வ்யாஸம் = நவபிகர்வம். இதற்குச் சமம் = (900000000000) ஆகும், இதற்குப்பரிதி என்கிற சுற்றளவுக்குச் சமம் = (2827433388233) இதுவாகும் (பரிதி) = $\left[\frac{\text{வட்டர்}}{\text{வ்யாஸம்}} \right] = \left\{ \frac{2827433388233}{900000000000} \right\} = \pi = (\text{பையளவு}) = (3.14159265359\frac{2}{3})$. இவ்விதம்; நீலகண்ட ஸோமஸுத்வா சொல்லிய மாதவன் என்பவர்; பண்டிதர்கள் ஷெ யளவுப்படி சொல்லுகிறார்கள் என்கிறார்.

நீலகண்ட ஸோம ஸுத்வா காலம் = (AD-1450 to 1550) இதற்கு முன் மாநவ பண்டிதர் காலம் எப்போ என்பது தெரியவில்லை இவருக்குப்பேசுத்த மூலப்பதத்துக் குறிய கர்த்தாவும் எந்த காலத்தில் என்று விளங்கவில்லை. ஆகையால் (ஷெ $\pi = 3.14159265359\frac{2}{3}$) என்பது. ஆர்ப்பட்டர்காலம் (AD = 500) இதற்குப் பிறகு (AD = 1500) இதற்கு முந்தியுள்ள காலத்தில் ஏற்பட்டிருக்க வேண்டும். இந்த மத்தியிலுள்ள (1000) ஆயிரம் வருஷத்தில் வெகு கணித ஸமர்த்தர்கள் இருந்திருக்கிறார்களிங்கு என்று ஏற்படுகின்றது.

இதனால்:—

ஆர்ப்பட்டர்; வராஹமிஹிரர் முதலியோர் காலத்திய கிட்டத்ததுறியவட்டம் $\frac{62832}{20000} = \frac{3.1416}{1.0000} = (\pi)$ என்றும், இதற்குப் பரிதி (அதாவது

AD = 500 to 1500) ஆகிய, இந்தக் காலத்தில்:—

$\pi = \left(\frac{2827433388233}{900000000000} \right) = \left\{ \frac{(3.14159265359\frac{2}{3})}{(1.000000000000)} \right\}$
= (3.14159265359 $\frac{2}{3}$) என்றும் ஏற்படுகிறது:—

சுமார் (AD 1550)க்குப் பிந்தி மேல் நாட்டர் கீழ் நாட்டார் முதலிய பல நவீனர்களால் நவீனகணித அளவு முறைகளைக் கொண்டும் ஷெ (π)வை இவர்கள்:—

$\pi = 3.1415926535897932 \dots \rightarrow \dots$ என்கிறார்கள் :—

இவர்கள் சம்மதப்படி ஷெக்கு ஸ்தானம் இவ்வளவுதான் இன்னும் மேலு முண்டா என்றால்:— இதனுடைய ஸ்தானத்துக்கு முடிவான அளவே கிடையாது. (—→) இவ்விதக் குயிரிருந்தால் முடிவின்மிச் செல்வதையே காட்டும்.

இங்கே ஷெ ($\pi = 3.1415926535897932 \rightarrow$) ஐ இதற்கு மேலும் சொல்லாமல் ஏணிக்கு இதுபர்யந்தம் நிருத்தினாய் என்று கேள்வியும் எழுப்புகிறது. இதற்குத் தக்கச் சமாதானம் யாதென்றால்:—

$$\begin{aligned} \text{ஆர்பட்டாதியர் சம்மத ஒரு விட்ட வட்டம்} &= 3.1416 \\ \text{நூதாதியர் சம்மத ஒரு விட்ட வட்டம்} &= 3.16228 \end{aligned}$$

$$\text{ஷெ இரு மதங்களின் வித்யாஸம்} = 0.0207$$

இக்கோலாகலக்கர்த்தாவின் சம்மதப்படிக்கோ ஒரு விட்டதின் வட்டம் = 3.2 என்பது. இவைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்றுக் கொன்று வித்யாஸமாக இருப்பது போலவே நவீனர் களுக்கு வெகு சம்மதமாக இருக்கும் இந்த $\pi = (3.1415926535897932 \rightarrow) = 180^\circ$ க்கு; இவ்வித மேற்பட்டதற்சும் கணித மூலமுண்டு. இதன் பலவிசித விவரணம் சுருக்கமாகக் காட்டப்படுகிறது.

MACHIN (மேஷின்) மதப்படி கற்பனை

அதாவது:—

$$\therefore (4 \text{ ஸ்ப}^{-1} \frac{1}{5} - \text{ஸ்ப}^{-1} \frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4} \text{ இதற்கு லாகரிதும் படிக்கு}$$

வற்படுஞ் சமீகரண ஸ்டுதரம்:—

இங்கு ($\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$) எனக் கொண்டால்:—

$$[16 \left\{ \frac{1}{1} \left(\frac{2}{10} \right)^1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{10} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{10} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{2}{10} \right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{10} \right)^9 - + - + - \rightarrow \right\}$$

$$(-4) \left\{ \left(\frac{1}{239} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{239} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{239} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{239} \right)^7 + - + - \rightarrow \right\}]$$

$$\text{இங்கு வந்தஸர்வதன எண்} = 3.201025 \dots$$

$$,, ,, ,, \text{ருண எண்} = -0.59433 \dots$$

$$\text{ஷெ இரண்டின் வித்யாஸம்} = 3.141592 \dots \rightarrow = \pi = 180^\circ \text{க்கு.}$$

இவ்விதம் (டான் 30°) = 57735 = ($\frac{1}{5}$) $\frac{1}{2}$ இதையும் லாகரிதும் படி ஸ்டுதர ஸமீகரணஞ் செய்ய:—

$$\left\{ \left[\frac{1}{1} \left(\frac{1}{5} \right)^1 \right]^1 - \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^1 \right]^3 + \left[\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^1 \right]^5 - \left[\frac{1}{7} \left(\frac{1}{5} \right)^1 \right]^7 + - + - + \rightarrow \right\} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\therefore \pi = (6 \times 0.5235988) = 3.1415928 \dots \rightarrow = 180^\circ$$

மேலே காட்டிய இருவித வழிப்படிக்கும் ($\pi = 3.14159 \dots \rightarrow$) ஐ சில ஸ்தான பர்யந்தம் கணிதம் செய்ய ($3.1415926575897932 \dots \rightarrow$) என்றேற்

படுகிறது. இதற்கு மேல் ஷே இருவித வழிகளின் விடைகளுந் தாரதம்ய மடைகின்றது. (கணிதவிஸ்தாபயத்தால் அவ்வளவு பர்யந்தம் கணிக்காமல் மூலவழியை மாத்திரமிங்கே காட்டியது.) அவ்வித வித்யாஸ மறிய ஆசை உள்ளவர்கள் மேற்காட்டிய வழிப்படி கேவல வ்யக்தத் கணிதத்தால் ஷே வித்யாஸத்தைத் தெரிந்து கொள்ளலாம். இதன் பேச்சிங்கு வந்ததன் காரணம்:—பூர்வீகர்கள் காலத்தில், விட்டத்தின்வட்டவித்யாசம் எவ்விதம் முன்காட்டியபடிக்கேற்பட்டதோ மத்பேதத்தால்; அவ்விதமே இக்காலத்திலும் நவீன முறைபடி காட்டிய இருவித வழியையும் பின்பற்றியவர்களுக்கு பலத்தின் (விடையின்) வித்யாஸத்தால் மத்பேதம் உண்டாகின்றது. இந்த இரண்டாம் வழிபடிக்கேற்படும் வித்யாஸத்தைக் கண்டு பிடித்துக் கூறியது முதலில் நான்தான். இது சுமார் (AD = 1940ல்) என்னால் கண்டறியப்பட்டதாகும்.

இந்த (π) பரிமாணம்-கணிக்க மூன்றாம் வழியுமுண்டு:—

கேவலம் புஜஜ்யா (ஸைன் θ) விலிருந்தே லாகரிதும்படி கண்டறியப்படுகின்றதாகும்:—

இங்கு (ச) = ஸை 30° = $\frac{1}{2}$ ஆனால்:—

$$\pi = 6 \left\{ \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi^9}{9} \dots \rightarrow \right\}$$

இங்கு:—ச = $\frac{1}{2}$ = ஸை 30°க்கு

$$\therefore \frac{\pi}{6} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2} + \dots \rightarrow \right\}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \times 6 = \pi = (3.14159265 \dots \rightarrow) \text{ம் வரும்.}$$

இதுபோல் ஷே π ஐக் கணிக்க இன்னும் பலவழிகளும் உள்ளன.

தற்சமயம் கிரககணித உபகரண சாதநங்கட்கு இந்த π (பை) யை = 3.1415926535897932... இந்தஸ்தானத்துக்குமேல் கொண்டு கையாண்டதாகத் தெரியவில்லை. தற்சமயம் புழக்கத்தில் ப்ரசித்தமாக இருக்கும் சேம்பர்ஸ் மேதமேடிகல் டேபிளைக் கண்டவர்கட்கு (π = 3.1415926536) இந்த ஸ்தானத்துக்குமேல் கையாளவில்லை என்பது நன்றாகத் தெரியும். டேபிலுக்குட்பட்ட ஸைன் முதலிய (வானகணித) உபகரணங்களும் (7பிகர்) ஏழுஸ்தானத்துக்குமேலில்லை. ஒன்பது ஸ்தானத்தில் அறைகுறையுடன் எங்கேயோ சிற்சில விடங்களிலிருப்பதாகச் சொல்லிக்கொள்கிறார்களே தவிர நேறில் கண்டோர் யாருமில்ர்.

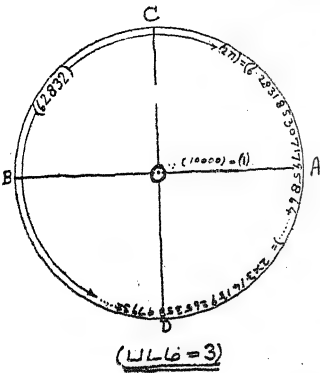
தற்சமயம் உபயோகத்திலிருந்து வாக்கூடியவை.

$\pi = \left(\frac{\text{வட்டம்}}{\text{விட்டம்}} \right) = \frac{3}{1}; \left(\frac{16}{5} \right) \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, 3.14159265359.... \rightarrow$
இவைகள் ஒன்றுக் கொன்றைவிட சூക്ഷ்மங்கள் (சுத்தங்கள்) ஆகும்.

$\left\{ \frac{31416}{10000} \right\} = \text{ஐ} \pi = \left(\frac{\text{வட்டம்}}{\text{விட்டம்}} \right)$ ஐக் கொண்டு கணிக்கவேண்டிய
வட்ட உருவக் கணிதங்கள் விவரிக்கப்படுகின்றன.

ஆரியபட்டரால் நிச்சயிக்கப் பட்ட $\left\{ \frac{\text{வட்டம்}}{\text{விட்டம்}} = \frac{62832}{20000} = \frac{3927 \times 16}{1250 \times 16} = \pi \right\} \therefore$
பாஸ்கார் மதப்படிக்குறிய $\left\{ \frac{\text{வட்டம்}}{\text{விட்டம்}} = \frac{31416}{10000} \right\} = \left\{ \frac{3.1416}{1.0000} \right\}$ தற்சமய
உலக வழக்கிலுள்ளவை யிவைகளே.

(1) ஸமவட்ட கோள்கணிதம். (சிலகிரம்) இங்கு $(\theta A) =$ அறை
விட்டம் $= 10000 \therefore$ ஆனால் $\odot = (ADBC)$
 $= 62822$ ஆகும். $(AB) =$ விட்டம் $=$
முழுவிட்டமானால் $\odot = (ADBC) = 31416$
என்றாகும் $(AB) = 1 =$ ஒன்றாகக் கொண்டால்
 \square
 $\odot = (ADBC) = \left(3 \frac{1415926535897932}{10000000000000000} \dots \right)$
 $= 3.1415926535897932 \dots \rightarrow$ என்றாகும்
இஷ்டம் போல் கொள்க $(\dots \rightarrow)$ இக்குறிப்பு
முடியாபல் (சணிக்கும் எண்கள்) போவதைக்
காட்டும்.



வினாவிடைகள் இதைப்பற்றியவைகள்:—

(சஜம் = 12) குறுக்களவு (விட்டம்) உள்ள துறவுக்கு (கிணற்றுக்கு)
சுத்தளவு என்ன, விஸ்தீர்ண மென்கிற குழி என்ன?

என்றால்:—

தெரிந்த விட்டத்தை (31416) ஆல் பெருக்கி (10000) ஆல் வகு; ஈவே
வட்டமாகும். இப்படி வந்த வட்டத்தை விட்டத்தால் பெருக்கியதை நாலால்
(4 ஆல்) வகுத்த ஈவு அந்த வட்டத்துக்குறியாய். (என்றால் வட்ட விஸ்தீர்ண
மென்கிற விசாலமாகும்).

அல்லது $\left(\frac{31416}{10000} \right)$ ஐயே விட்டவர்க்கத்தால் பெருக்கி நாலில் வகுத்தாலும்
வட்டக்குழி வந்து விடும். இல்லையேல் $\left(\frac{31416}{10000} \right)$ ஐ அறை விட்ட வர்க்கத்தால்
பெருக்கினாலும் வட்டக்குழி வந்துவிடும். இதற்குச் சமீகாணம்:—

(1). வட்டம் = $\left(\frac{31416}{10000}\right) \times (\text{விட்டம்});$

(2). வட்டக்குறி = $\frac{1}{4} \left\{ (\text{வட்டம்}) (\text{விட்டம்}) \right\}$. அல்லது

வட்டக்குறி = $\frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{31416}{10000}\right) (\text{விட்டம்})^2 \right\}$ இல்லைபேல்

வட்டக்குறி = $\left\{ \left(\frac{31416}{10000} \pi\right) \left(\frac{\text{விட்டம்}}{2} = \text{அரைவிட்டம்}\right)^2 \right\}$

தெரிந்த விட்டம் (12) பணிசண்டை (31416)ல் பெருக்க 376992. இதை (10000)ல் வகுக்க ஈவு $37\frac{6992}{10000}$; இதேதான் 12ஐ விட்டக்கிணற்றின் சுத்தளவாகும்.

\therefore விட்டம் = 12க்கு, சுத்து அளவு = $37\frac{6992}{10000}$, என்பதாம்.

வட்டக்குழிக் கணக்கும் உதாஹரணம்:—

விட்டம் = (12) கஜம் ஆகையால் இவ்விட்ட வட்டத்தின் குழி என்ன வைன்றால்:—

12 விட்டத்தின் சுத்து $37\frac{6992}{10000}$ இதை (ஒரு 12ன் கால்பங்கால் $\left(\frac{12}{4} = 3\right)$ ஆல் பெருக்க) ஒரு வட்டம் $37\frac{6992}{10000}$ க்குச் சமம் = $37\cdot6992$ இதை 3ஆல் பெருக்க $(37\cdot6992 \times 3) = 113\cdot0076$ ம் வட்டக்குழியாம்.

இங்கே படம் ஈலை (4ஐ)க கவனி:—

இங்குள்ள வட்டத்தில் (O) என்பது சிறிய பெரிய இருவட்டங்களின் மத்திய கேन्द्रம் (மத்தி = ஸென்ட்ரல்).

பெரிய அரைவிட்டம் = O B = 6.

சிறிய அரைவிட்டம் = O A = 3.

என்றுமுதலில் நிச்சயிக்கவும்.

பிறகு:—

$(4 \times 4) = 16$ சதுர (கஜ)க் குழிக்கு வெள்ளை வர்ணம் பூச கூலி (10) ரூபாய், மஞ்சள் வர்ணம்

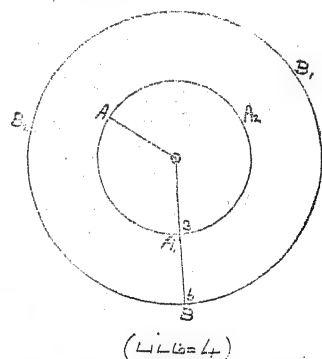
பூசக் கூலி (15) ரூபாய் ஆகையால் படத்தில் கண்ட சிறிய வட்டத்துக் குழிக்கு மாத்திரம் மஞ்சள் பூச்சும், இச்சிறிய வட்டத்துக்குமேல் மிகுதியாயிருக்கும் பெருவட்டக்குழிக்கு வெள்ளைப் பூச்சும் பூசத்தரவேண்டிய கூலிகள் எம்பாத்திரம்.

என்றால்:—

இதன் விகிதஸாம்யகணிதம்:—

முன் சொன்னபடி சிறிய வட்டத்துக்கும் பெரிய வட்டத்துக்குங் குழி கணித்துப் பெரிதில் சிறிதைக் கழித்த மீச்சமே—(சிறியவட்டக்குழி கழிந்த) பெறிய வட்டக்குழியாகும். என்பது பொதுவாகத் தெரிந்துவிடும்.

சிறியவட்டக்குழியின் சம்பந்தமில்லாமலே, சிறிய பெரிய அரை விட்டங் களைக்கொண்டே பெறிய வட்டச் சொச்சக்குழியைக் கணிக்கும் வழி:—



படம் 2 ஐப்பார் = $(A; A_1; A_2 \odot) =$ சிறுவட்டம்; $(B; B_1; B_2 \odot) =$ பெருவட்டம்.

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \text{(பெருவட்டக்குழியில் சிறுவட்டக்குழி)} \\ \text{கழிந்த சொச்சப் பெறுவட்டக்குழிக்கு} \end{array} \right\} \\ = \left\{ (\odot B, B_1, B_2)^2 - (\odot A, A_1; A_2^2) \right\},$$

பெரிய அறை விட்டவர்க்கத்தில், சிறிய அறை விட்டவர்க்கத்தைக் கழித்த மிச்சத்தால் $\left(\frac{31416}{10000} = \pi\right) = 3.1416$. ஐப் பெருக்குவதே பெரு வட்டச் சிறுவட்டக்குழிகட்குறிய அந்தர (வித்யாஸ)க் குழியாம்.

இல்லையேல்:—

பெரு அறைவிட்டத்தில் சிறு அறைவிட்டத்தைக் கூட்டுந் துகை; பெரு அறை விட்டத்திற்கு சிறு அறை விட்டத்தைக் கழித்ததுகை, (π) ஆன இம் மூன்று துகையையும் ஒன்றுக் கொன்று பெருக்கியதும் (முன் போல) இருவிட்ட வட்டக்குழிகளின் அந்தர (வித்யாஸ)க் குழியாம்.

குறிப்பு:— பெரு அறைவிட்டம் = (பெ. அ. வி)

சிறு அறைவிட்டம் = (சி அ. வி) \therefore

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(பெருவட்டக்குழிக்கும்)} \\ \text{சிறுவட்டக்குழிக்கும் உள்ள} \\ \text{அந்தர (வித்யாஸ)க் குழி)} \end{array} \right\} = \left\{ (\text{பெ. அ. வி})^2 - (\text{சி அ. வி})^2 \right\} \times \pi \\ = (\text{பெ. அ. வி} + \text{சி. அ. வி})(\text{பெ. அ. வி} - \text{சி. அ. வி}) \pi.$$

என்று இவ்விரு வழியிலும் விடை வருவது சமமேயாகும்.

இதற்கு இங்கு பெரு விட்டம் = 12 கஜம். இதன் வட்டக் குழிக்கணிக்க $\pi \times \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 3.1416 \times 6 \times 6$.

$$= 3.1416 \times 36.$$

$$= 113.0976 = \text{பெருவட்டக்குழி.}$$

$$\pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3.1416 \times 3 \times 3^2$$

$$= 3.1416 \times 9.$$

$$= 28.2744 = \text{சிறு வட்டக்குழி.}$$

$$(113.0976 - 28.2744) = 84.8232 = \text{இருவட்டக்குழி பந்தம்.}$$

இதைத்தான் சிறுவட்டக் குழிக்கு (குழியால்) மிச்சமான பெருவட்டக் குழி என்று சொல்வது வழக்கம்.—

வட்டக்கூலி விசேஷக்கணக்கிற்கு:—

—8 கஜம் குறுக்கில் ஓர்வட்டக்கிணர் ஏற்கனவேயுள்ளது; இதையே சொந்தக்காரனுக்கு -14-கஜம் அகலத்தில் உள்ள வட்டக்கிணறுக்க வேண்டுமென்று தோன்றியது. இவன் ஏவலால் கூலிக்காரர்கள்:—தோண்டக்கூலி—முதல்மட்டுக்கு ஓர் சதுர கணக்கஜக்குழிக்கு -கால் ரூபாயும்; மட்டு 2ல் $\frac{1}{2}$; மட்டு 3ல் 1, மட்டு 4ல், 2; மட்டு 5ல் 3, மட்டு 6ல் 4, மட்டு 7ல் 5 ரூபாய்கள் வீதம் கூலி கேட்டனர். ஆகையால் தோண்டிய ஆட்களுக்குச் சேர வேண்டிய மொத்தக் கூலி ரூபாய்கள் எவ்வளவு என்னில்:—

(87ம் 88ம்) பக்கத்தில் காட்டிய விவரப்படிக்கு:—

குறிப்பு.—

பெரு அரைவிட்டம் = (பெ. அ. வி) = A

சிறு அரைவிட்டம் = (சி. அ. வி) = B

(ஓரே மகத்திமகேந்திர (ஸன்ட்ரல்) முள்ள இஷ்டமான இருவட்ட வித்யாஸக் குழி) = π (பெ. அ. வி + சி. அ. வி) (பெ. அ. வி—சி. அ. வி) = (A+B) (A—B) (3.1416).

\therefore இங்கு: $2A=14$, $2B=3 \therefore A=7$, $B=4$.

$\therefore (A+B) (A-B) = 11 \times 3 = 33 [\therefore]$

(ஓர் மட்டுக்குறிய இருவட்ட வித்யாஸ } $(33 \times 3.1416) = 103.6728$.
(சொச்ச) கணக்கஜக்குழிக்கு) = என்று ஏற்பட்டது, இதற்குக்

கூலி ரூபாய் கணிக்கும் விவரணம்:—

(மட்டு 1 ரு கூலிரூபாய் $\frac{1}{4}$ \therefore)	கூலி	$= 103.6728 \times \frac{1}{4} =$	25.9182
(மட்டு 2 ரு கூலிரூபாய் $\frac{1}{2}$ \therefore)	செ	$= 103.6728 \times \frac{1}{2} =$	51.8364
(செ 3 ரு செ 1 \therefore)	செ	$= 103.6728 \times 1 =$	103.6728
(செ 4 ரு செ 2 \therefore)	செ	$= 103.6728 \times 2 =$	207.3456
(செ 5 ரு செ 3 \therefore)	செ	$= 103.6728 \times 3 =$	311.0184
(செ 6 ரு செ 4 \therefore)	செ	$= 103.6728 \times 4 =$	414.6912
(செ 7 ரு செ 5 \therefore)	செ	$= 103.6728 \times 5 =$	518.3640

ஆகமொத்தம் [= (15 $\frac{3}{4}$.)] குக் ரூபாய்களின் = 1632.8466-ரு

இங்குவிடை = 1632.8466. ரூபாய்கள் கூலியாம்:—

இல்லையேல்:—

செ மட்டுக் கூலி விகிதம் 7ம் கூட்டிய = ($\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$) = 15 $\frac{3}{4}$ = $15\frac{3}{4}$ இதை மட்டுக்குழியாகிய (103.6728) ஆல் பெருக்கினாலும் கூலிரூபாய்களின் (103.6728 \times $15\frac{3}{4}$ = 1632.8466) என்று வந்துவிடும், இது சலபவழி.

$$\begin{aligned}
\text{கூலி கொடுக்கவேண்டிய ரூபாய்} &= 1632.0000 \\
\text{அணுக்கள்} &= (.8466 \times 16) = 13.5456. \\
\text{தம்பிதிகள்} &= (.5456 \times 12) = 6.5472. \\
\text{ஆக } \left\{ \begin{array}{l} \text{ரூபாய்} = 1632 \\ \text{அணு} = 13 \\ \text{பை} = 6.55 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

கூலி ரூபாய்களின் = 1632-13-7 என்பதுதான் இங்கு விசேஷம்.

பெரு அறை வீட்டம் = (பெ. அ. வீ.) = 6; இதன் வார்க்க = 36

சிறு அறை வீட்டம் = (சி. அ. வீ.) = 3; இதன் வார்க்க = 9

$$\text{ஊ இருவர்க்க வித்யாசமிதன்} = 27$$

ஊ $3 \cdot 1416 \times 27 = 84 \cdot 8232 =$ இருவட்டகுழி (வித்யாஸம்). யந்தரம்.

அல்லது.

$$\begin{aligned}
\left\{ (\text{பெ. அ. வீ.}) + (\text{சி. அ. வீ.}) \right\} \left\{ (\text{பெ. அ. வீ.}) - (\text{சி. அ. வீ.}) \right\} \pi \\
= (3 \cdot 1416) (6 + 3) (6 - 3). \\
= 3 \cdot 1416 \times 9 \times 3. \\
= 3 \cdot 1416 \times 27 = 84 \cdot 8232. \\
= \text{இருவட்டக் குழியந்தரம்.}
\end{aligned}$$

இம்மூன்று விதவழியிலும் வந்த விடைகள் சமமே.

ஆகையால் இவ்விட்டமான வழியில் கணித்துக் கொள்க—

இனி பூச்சுக் கூலி கணிக்க:—

$$\text{சிறு வட்டக்குழி (மேலேகணித்தது)} = 28 \cdot 2744$$

$$\text{சிறு வட்டக்குழி போனபெறு வட்டக்குழி} = 84 \cdot 8232$$

$$\text{ஊ ரண்டுங் கூட்ட-12-வீட்ட வட்டக்குழி} = 113 \cdot 0976$$

சதுரகஜம்-16க்கு மஞ்சள் பூச்சுக் கூலி = 15, வெள்ளை பூச்சுக் கூலி = 10
ஆகையால் சிறுவட்டக்குழி = 28.2744 ரூ மஞ்சள் பூசு

$$\frac{28.2744 \times 15}{16} = (424 \cdot 116 \div 16).$$

26.5072 ரூபாய் (மஞ்சள் பூச்சுக் கூலி).

$$\frac{84 \cdot 8232 \times 10}{16} = \frac{848 \cdot 232}{16} = 53 \cdot 0145 \text{ சொச்சப்பெரு வட்டக் குழிக்கு}$$

வெள்ளை வர்ணம் பூச்சுக் கூலி ரூபாய் = 53.0145

ஆ மொத்தக்கூலி = (53.0145 + 26.507).

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{ரூ. அ. பை.} \\ 89 - 8 - 4.22 \end{array} \right\} \text{ என்பது.}$$

மற்றும் வருவனவெல்லா மிப்படிக்குக் கணி கொள்ளவும்.—

வட்டக் குழிக்குறிய அறை விட்டக் கைவாத்தால் (கம்பாஸால்) சுற்றிலும் பெருக்கடியாகத் தொடர்ச்சியுள்ள வட்டங்கள் வரைந்தால் (செய்தால்) முடிவில் இது பந்து முதலிய குண்டு உருவம் போன்ற கன (பரிமாணமுள்ள) மண்டலங்கள் (கன வட்டங்கள்) ஆகும். இவ்வித உருவமுடைய கனவட்டங்களுக்குத்தான் கோலம் என்கிற பெயர் என்று முக்யமாக இங்கு கவனிக்க வேண்டியது.

கோல மேற்பரப்புக்குழி (கோல கனக்குழி - முதலிய) கணிக்க:—

வட்டக்குழியை நாலில் பெருக்கக் கோல மேற்பரப்புக்குழியாகும். அல்லது அறைவிட்ட வர்க்கத்தால் (π) பையைப் பெருக்கினதை நாலி (4) ல் பெருக்கினாலும் கோல மேற்பரப்புக்குழி வந்துவிடும்.

கோலமேற்பரப்புக்குழியை விட்டத்தால் பெருக்கியதை ஆறில் வகுத்த ஈவு கோலமத்யகேந்திர (கர்ப்பகேந்திர)ாதி ஸம்மந்தமாகிற கோல கனக்குழியாம். இல்லையெல், கோல அறைவிட்டக் கனத்தால் π (பை) பையைப் பெருக்கியதை நாலில் பெருக்கி மூன்றில் வகுத்த ஈவும் கோல கனக் குழியாக வரும்.

ஸமீகரணங்கள்:—அறைவிட்டம் = (அ.வி);

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(கோலமேற்} \\ \text{பரப்புக்குழி)} \\ \text{= (கோ.மே.ப.கு)} \end{array} \right\} = \left\{ (4 \times \text{வட்டக்குழி}) \right\}$$

$$= \left\{ (4\pi)(\text{அறைவிட்ட})^2 \right\};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(கோலகன} \\ \text{க்குழிக்கு)} \end{array} \right\} = \left\{ (\text{கோ.மே.ப.கு}) \left(\frac{\text{விட்டம்}}{6} \right) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{4}{3} \pi (\text{அ.வி})^3 \right\};$$

உதாரணம்:—

கஜம் = 6 அறை விட்டமுள்ள கோலத்தின் மேற்பரப்புக்குழியென்ன. கோல கனக்குழியென்ன வென்றால்:—

வட்டக்குழி (6 கஜ அறைவிட்ட வட்டத்துக்கு) = 113.0976 இதை நாலில் (4ல்) பெருக்கியது = 452.3904 மேற்பரப்புக்குழி, அல்லது 6ன் வர்க்க = $6 \times 6 = 36$. இதை 4ல் பெருக்க = 144, இதை ($\pi = 3.1416$) ஆல் பெருக்க = $452.3904 =$ கோல மேற்புக்குழி இவ்விதிலும் வந்து விட்டது.

கோல்களங்கணிக்க:—

முன்வந்த கோல மேற்பறப்புக்குழி:— 452·3904. இதை இஷ்ட விட்டம் 12ல் பெருக்க = 5428·6848. இதை 6ல் வகுக்க: வந்த ஈவு 904·7808. இல்லையேல் ஷெக்கு இஷ்ட அறை விட்டம் 6 இதன் கனம் = $6 \times 6 \times 6 = 216$. இதை 4ல் பெருக்க 864 = (216×4) , இதை $(\pi = 3·1416)$ ல் பெருக்கியது = 2714·3424. இதை 3ல் வகுத்த ஈயவு = 904·7808. முன்போலிங்கும் கோல கர்ப்பக்குழியென்கிற, கோல கர்ப்ப கனபலம் வந்து விட்டது.

(2) சுத்தளவு ஆகிற வட்டம் தெரிந்த விடத்தில் குறுக்காகிய விட்டம் கணிக்க:—

கணித சுலபத்துக்காகப் பெரியோர்களால் நகூத்ர மண்டலத்தை (பகோலத்தை)-21600'-கலைகளாகப் பிறிக்கப்பட்டிருக்கிறது. (என்பது கற்பனையாலேயே) ஆகையால் இதன் குறுக்க(ளவுக்க)ான விட்டம் அல்லது அறை விட்டம் (என்கிறதரிஜ்யா) என்ன அளவென்றால்:—

தெரிந்த வட்டத்தை ஒன்றால் பெருக்கியதை $(3·1416 = \pi)$ ஆல் வகுத்த ஈவே அவ்வட்டத்தின் விட்டமாகும்.

இதைப் பாதிசெய்ய அறைவிட்டமாகும்.

இல்லையேல் வட்டத்தைப் பதினாயிரத்தால் பெருக்கி 3·1416ல் வகுத்த ஈவும் முன்போல் விட்டம் வரும்.

இதை 2ல் வகுக்க ஷெக்கு அறை விட்டமாகிய தரிஜ்யாவந்து விடும்.

இதற்கு சமீகரணமிங்கே:—

$$\text{விட்டம்} = \left\{ \frac{\text{வட்டம்} \times 1}{(\pi = 3·1416)} \right\} = \left\{ \frac{\text{வட்டம்} \times 10000}{31416} \right\}.$$

தெரிந்தவட்டம் = 21600 இதை 1ல் பெருக்க 21600 இதை $(3·1416 = \pi)$ ல் வகுத்த ஈவு $\left(\frac{31000}{3·1416} \right) = 6875·15$; அல்லது 21600ஐ (10000)ல் பெருக்க 216000000. இதை 31416-ல் வகுத்த ஈவு 6875 $\frac{15000}{31416}$ என்றாகும்.

மத்தும் வந்தன வெல்லாமிப்படிக்க கணித்துக்கொள்ள வேண்டியது.

படம் (4 A)க்கு விவரணம்:—

படம் (4 A)ஐக் கவனி:—

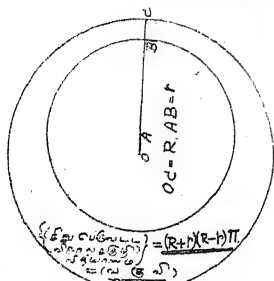
OC = பெரிய வட்டத்தின் அரைவிட்டம்,

AB = சிறிய வட்டத்தின் அரை விட்டம் ஆகும்.

குறிப்பு:—

இவ்விருவித வட்ட (ஸென்ட்ரல்களும்) மத்தி மங்களும் ஒன்றாக இருக்கவேண்டும் என்கிற அவசியம் இதைப் போன்ற க்ஷேத்ரங்களுக்கு

கவசியமே கிடையாது. ஆனால் வட்டத்துள்ளே சிறுவட்டம் எப்படியாவது இருக்கவேண்டியது தான் ஒன்று.



சுத்த வட்டம் = $\pi(R^2 - r^2)$ என்கிற
படம் (4 A)

[இங்கே சொன்ன விதியை படம் (4B)க்கும் (4C)க்கும் கொள்ள வேண்டியது அவசியம்]

என்பதை உணர்க:—

(AB) அறைவிட்ட வட்டக்குழி கழிந்த, (OC) அறைவிட்ட வட்டக்குழி (விசாலம்) எவ்வளவு என்றால் இதைக் கணிக்க:—

$\therefore OC = R; AB = r$ இங்கிப்படியானால்:—

[(பெருவட்டக்குழி) — (சிறுவட்டக்குழி)]

$$= [\pi R^2 - \pi r^2]$$

$$= (\pi \times R^2 - \pi r^2)$$

$$= \pi (R^2 - r^2)$$

$$= \pi (R + r) (R - r)$$

என்பதாயுணர்க.

படம் (4B) க்கு விவரணம்:—

படம் (4B) ஐக் கவனி:—

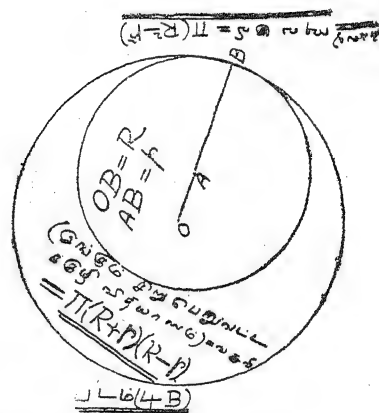
இதிலும்:—

OB = பெருவட்டத் துரிய அறை விட்டம் = R.

AB = சிறுவட்டத் துரிய அறை விட்டம் = P;

இங்கே பெரு சிறு வட்ட ஓரங்கள் (B) என்றஸ்தானத்திலே சேருகின்றன. இன்னும் இது போல் பல விதங்களாக அமையத்தகும்.

ஆகையால்:—



(இங்கும் பெருவட்டச் சிறு வட்டக் குழி களின் வித்தியாசத்துக்குச்)

$$= \pi [(OB)^2 - (BA)^2]$$

$$= \pi [(OB + BA) (OB - BA)]$$

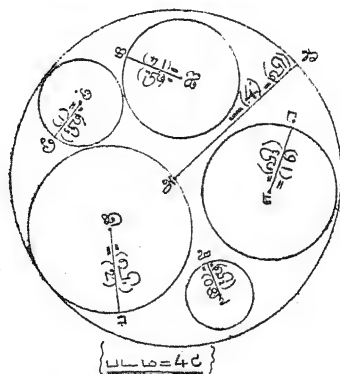
$$= \pi (R + P) (R - P)$$

மற்றவை படம் 4A றுச் சொன்னபடிக்காகும்:

படம் (4C) ஐக்கவனிக்கத்தம் இஷ்டம் போல்சந்தேகங்கள் யாவும் அற சேத்ரங்களைச்சாதனம் நன்கு செய்யலாம்:—

மற்றும் வருவன வெல்லாம் இவைகள் போலக் கொள்ளலாம்.

படம் (4C)க்கு விவரணமிங்கு காண்க:—



படம் (4 C)ஐக் கவனி:—

பெரியதாகிய (வி) அறை விட்ட வட்டவிசாலத்தில், மற்றய சிறியவைக ளாகிய (வி₁, வி₂, வி₃, வி₄, வி₅) அறை விட்ட வட்டங்களின் விசாலங்கள் கழிந்த மிச்சப் பெருவட்டக் குழி என்ன வென்றால்:—

இதற்குச் சில விவரணமிங்கு;

அறைவிட்ட = (வி):—

∴ விட்ட = 2 வி என்றாகும்.

பெருவட்ட அறைவிட்ட = வி = 4' = (அ ஆ).

மற்றய சிறுவட்ட அறைவிட்டங்களினுடைய.

$$\left. \begin{aligned} (இ ஈ) &= (வி₁) = (2') \\ (உ ண) &= (வி₂) = (0.8') \\ (எ ஏ) &= (வி₃) = (1.6') \\ (ஐ க) &= (வி₄) = (1.4') \\ (ஒ ஓ) &= (வி₅) = (1') \end{aligned} \right\}$$

என்பவைகளாகும்:—

இவ்வித சேஷத்ரங்கடக்கு மிச்ச வட்டக்குழிகணிக்கப் பொது விதி:—

சிறு அறைவிட்டங்களின் வர்க்கக் கூட்டலை பெறு அறைவிட்ட வர்க்கத்தில் கழித்த மிச்சத்தால் ($\pi = 3.1416$)ஐப் பெருக்கியதே சிறுவட்டக் குழிகள் கழிந்த மிச்சமாகிய பெருவட்டக் குழியாகும்.—

இதற்கு விளக்கம்:—

இங்கு அறைவிட்ட = ($R = r = வி$) ஆகையால். பொதுவாய்
வட்ட விசாலக்குழி = $\pi (R = r)^2 = \pi வி^2 ∴$

$$\begin{aligned} ∴ (இங்கு சிறுவட்டக் குழிகள் கழிந்த மிச்சமாகிய பெருவட்டக்குழி) \\ = \{ (\pi வி^2) - (வி₁^2 \pi) - (வி₂^2 \pi) - (வி₃^2 \pi) - (வி₄^2 \pi) - (வி₅^2 \pi) \} \\ = (\pi வி^2) - \pi (வி₁^2 + வி₂^2 + வி₃^2 + வி₄^2 + வி₅^2) ∴ \end{aligned}$$

∴ ஷெ ரு = (π) (வி² - வி₁² - வி₂² - வி₃² - வி₄² - வி₅²)
என்பதால் (மேற் கூறிய பொது விதிப் பிறப்பாம்.)

(இதற்குச் சமம்) = π { (வி²) - (வி₁² + வி₂² + வி₃² + வி₄² + வி₅²) } .)
என்றாயிற்று.

ஷெக்கு உதாரணமிங்கு காண்க—

$$வி^2 = 4^2 ரு = 16 \text{ இதில்}$$

$$\begin{cases} வி_1^2 = (2)^2 = 4 \\ வி_2^2 = (0.8)^2 = 0.64 \\ வி_3^2 = (1.6)^2 = 2.56 \\ வி_4^2 = (1.4)^2 = 1.96 \\ வி_5^2 = (1)^2 = 1.00 \end{cases}$$

(ஷெ மொத்த வார்க்கக் கூடலின்) = 10.16 இதை

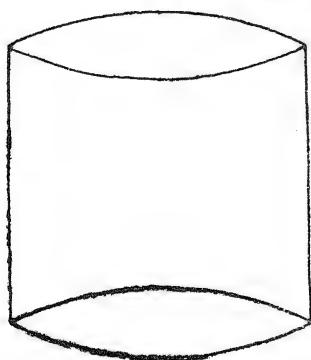
$$கழித்தசேஷம் (16 - 10.16) = 5.84.$$

இந்த 5.84 ஆல் (π = 3.1416) ஐப் பெருக்கியதற்கு (ச் சமம்)
= (3.1416 × 5.84) = 18.346944. என்றும்.

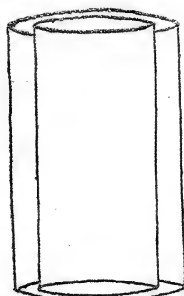
ஆதலால் ஷெ 4 அறைவிட்ட முள்ள பெருவட்டக் குழியில், முறையே
அறை விட்டங்கள் (2, 0.8, 1.6, 1.4, 1) உள்ள சிறுவட்டக் குழிகள் கழிந்த
மிச்சக் குழிக்குச் சரி = ஷெ 18.346944 என்று சொல்வது.

மற்றும் இதற்கு மேலும் வருவன வெல்லாமிப்படியே பார்த்துக் கொள்க.

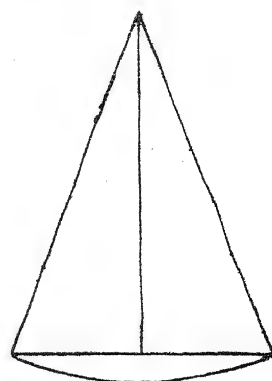
(π = பை)யைச் சம்பந்தித்ததும் பார்க்கக் கூடியவைகளு மாகிய சில
விசேஷ சிகிச்சாங்கள் இங்கே காணவேண்டியது—.



(படம்=5)



(படம்=6)



(படம்=7)

மாக்கால், படி, நாழி, முதலிய முகத்தலனைவக் கருவிகளும்; ஒழுங்குபெற
ரூபாய், அறை ரூபாய், கால் ரூபாய், காலணு, தம்பிடி முதலிய நாணயங்களை
ஒன்றன்மேல் ஒன்றுயடுக்கிக் காணப்படும் உருவும் படம் (ஐந்தை) (5ஐ)
அனுசரித்திருக்கும்.

குழாய் முதலியன படம் (6)ன் உருவவடிவச்சரித்திருக்கும்:—

கீரீடம்; கூறாய் (கூருளையாய்) வரும்படி பருப்பு சர்க்கரை முதலியவைகளை கடிதாசியில் கட்டிய உருவம் முதலிய (படம் 7)ஐ அனுசரித்திருக்கும்.

இவ்வித உருவங்களைப்பற்றிய கணிதவிதம்.

ஒழுங்கான உருளையின் கனபரி மாணங் கணிக்க:—

உருளை, வட்ட ஓரங்களுள்ள பட்டையான வடிவமென்று நமக்குத் தெரியும் ஆகையால் இதன் கனபரிமாணத்தை (கனக்குழியை)க் கணக்கிட நாம் அடிப்பாகத்தின் பறப்பை (அடிபாகக் குழியை) உயரத்தால் பெருக்கவேண்டும். ஆகையால்

வட்டபாகத்தின் அறைவிட்டம் = (R) என்றும்.—

உருளையினுயரம் = (H) என்றும் ஏற்படுத்திக் கொண்டால்:—

இதன் கனபரிமாணத்தை நாம்:—

(V) = $\pi R^2 H$. என்கிற சூத்தர்த்தால் கணிக்கலாகும்.

ஆகையால்:—

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ஒழுங்கான உருளை} \\ \text{யின் கனக்குழி} \\ \text{= (கனபரிமாண).} \end{array} \right\} = (\text{ஒ. உ. க. கு}) = V = (\pi R^2 H); \dots (1)$$

ஒழுங்கான உருளையின் தலப்பரப்பு என்கிற மேற்பரப்புக்குழி (உருளை தலக்குழி) கணிக்க:—

ஒழுங்கான - உருளைத் - தலக் - குழி = ஒ. உ. த. கு

$\therefore (\text{ஒ. உ. த. கு}) = (2 \pi RH)$. என்றாகும் —

கனவடிவ உருளை ஒன்றுக்கு இதனுடன் கூட மேல்பக்கமும் அடிபக்கமும் உண்டு. இரண்டு ஓரத்தலங்களும் சமம்.

இவைகளின் மொத்தப்பரப்பு = $(2 \pi R^2)$ ஆகையால்.

(ஒரு உருளையின் மொத்தத் தலப்பரப்பு)

= $(2 \pi RH + 2 \pi R^2)$ அல்லது இதன்

= $2 \pi R (H + R)$. என்றாகும்:—

உருளை போன்ற குழாய் உருக்கள் கணிக்க:—

(படம் 6ல்) காட்டியவாரு கனஉருளைவடிவ மொன்றை யெண்ணிப்பார். இதிலிருந்து அதே உயரமும், ஆனால் அதைவிடக் குறைவான அறை விட்டமுள்ள வேறோர் உருளையை, வெட்டியெடுக்கப்பட்டதாகக் கருதுவோம். இப்படி வெட்டியெடுத்தபிறகு குழாய் ஒன்று ஏற்படுகிறது (காணப்படுகின்றது).

இவ் வடிவத்துக்கே குழாயுருளை என்ற பெயர்.

இதனால் தெரிவது யாதெனில்:—

ஒரு குழாயுருளையின் கனபரிமாணம் வெவ்வேறு அறை விட்டங்களுள்ள இரண்டு கன உருளைகளின் கனபரிமாணங்களின் விகிதாசமே.

இரண்டு உருளைகளின் அறை விட்டங்கள் R; r என்றும், உயரம் H என்றும், $R > r$ என்றும் கொண்டால்:—

1653/2

$$\begin{aligned}
 & (\text{குழாயுருளையின் கனபரிமாணம்}) \\
 & = (\text{குழாயுருளை கனக்குழி}) \\
 & = (\pi R^2 H - \pi r^2 H) \\
 & = \pi H (R^2 - r^2) \\
 & = \pi H (R + r) (R - r).
 \end{aligned}$$

என்றாகும்.

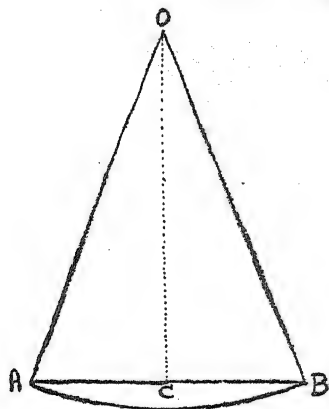
இதனுடைய மொத்தத்தலப்பரப்பு, ஒன்று. வெளிப்பரப்பினாலும்; மற் றொன்று உருளையின் உட்பரப்பினாலும் ஆகியது ஆகையால்.

$$\begin{aligned}
 \text{இதன் தலப்பரப்பு} & = (\text{குழாயுருளை தலப்பரப்பு}) \text{ என்று கொண்டால்.} \\
 (\text{குழாயுருளை தலப்பரப்பின்}) & = (2 \pi R H + 2 \pi r H) \\
 & = H 2 \pi (R + r).
 \end{aligned}$$

இப்பரப்பில் நாம் மேல்பாகம் அடிபாகம் இவைகளின் பறப்பை கணக்கி லெடுத்துக்கொள்ளவில்லை யென்பது கவனித்துக்:—

படம் 8 ஐக் கவனி. இது ஒழுங்கான கூட்டக்கூருருளைக் கோத்திரமாகும்.—

இப்பக்கத்தில் காட்டிய படத்துக்குரிய விவரணம்:—



(படம் = 8)

மணற்குவியலின் ஒழுங்கு, தானியக்கும்பல், இதற்கென்றே செய்யப்பட்ட ஒழுங்கானபுனல் இவைகளெல்லாம் இந்த ($\triangle AOB$) கோத்திரம்போன் றவைகளே; இந்தவித உருவைத்தான் கூருருளை ($\text{கூர்} + \text{உருளை}$) வடிவமென்றழைக்கப்படுகிறது.

(OC) என்ற அச்சின்மூலமாக வெட்டப்பட்ட கூருருளையின் ஒரு பகுதியை பக்கத்தில் காட்டிய (8ம்) படம் தெரிவிக்கின்றது. OA; OB;- இவை களை நாம் கூருருளையின் சாயந்த பக்கங்கள் என்று

கூறுகிறோம். ($\angle AOB$) என்பது கூருருளையின் உச்சிக் கோணமாம்.

கனவடிவக் கூருருளைக்குத் தலங்கள் இரண்டுண்டு:—

(a) வட்டவடிவான அடிபாகம்.

(b) சாய்வு தலம்.

CO = செங்குத்து உயரம். AO = BO = சாய்வு உயரங்கள்.

செங்குத்து உயரத்தை h ஆலும், சாய்வு உயரத்தை L ஆலும் குறிப்பது வழக்கம்.

கூருருளையின் கனபரிமாணம்: = (கூருருளைக்கனக்குழி)

(i) குழிவான உருளையொன்றையும், குழிவான கூருருளையொன்றையும், எடுத்துக்கொள். இவைகளின் அடிப்பக்கங்களும், உயரங்களும் ஒன்றுக் கொன்று சமமாயிருத்தலவசியம். கூருருளையை மணலாலாவது, நீராலாவது நிரப்பி; உருளை வடிவத்திற்குள் ஊற்று, இவ்விதம் மூன்று முறை செய்தால் உருளை முழுவதும் நிரம்புவதை நாம் காணலாம்.

(ii) கனவடிவமுள்ள உருளையொன்றையும், கூருருளையொன்றையும், எடுத்துக்கொள். இவைகளின் அடிப்பக்கங்களும், உயரங்களும் ஸர்வஸமமாயிருத்தலவசியம். இவைகள் ஒரே பொருளாலும் செய்யப்பட்டிருக்கவேண்டும். இரண்டையுந் நிறுத்துப்பார். இவற்றிலிருந்து கூருருளையின்னிறை உருளையின்னிறையில் $\frac{1}{3}$ (மூன்றிலொன்று) என்று நமக்குத் தெரியவரும்.

(iii) தண்ணீர் கொஞ்ச முள்ள இரண்டு அளவு பாத்திரங்களை எடுத்துக்கொள். இவைகளுக்குள் முழுகக் கூடிய ஒரே அடிபக்கமும், உயரமுமுள்ள உருளை யொன்றையும்; கூருருளை யொன்றையும், இவ்விரண்டையும் பாத்திரங்களில் போடு. தண்ணீர் மட்டங்களின் அதிகத்தைக் கவனி.

இச்சோதனை களிலிருந்து நமக்குத் தெரியவது யாதெனில்:—

கூருருளையின் கனபரிமாணம், ஸம அடித்தலமும்-சம உயரமும்-கொண்ட உருளை யொன்றின் கனபரி மாணத்தில் மூன்று லொரு ($\frac{1}{3}$). பாகம் உருளையின் கனபரிமாணம் = $(\pi r^2 H) = \pi r^2 h$.

ஆகையால்

கூருருளையின் கனபரிமாணம் = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$. என்றும்.

கூருருளையின் தலம்:— என்றால்: கூருருளை மேற்பறப்பு:—

(i) கூருருளையின் தலம் ஒரு வட்டத்தின் விருத்த கோணம் சமமாகும். சாய்வு உயரம் L என்றும். அடிப்பாகத்தின் அறை விட்டம் r என்று மெடுத்துக்கொள்.

(சாய்வுத் தலத்தின் பரப்பு = விருத்த கோணம்சத்தின் பரப்பு) அதாவது.

(வில்லின்னீளத்திலறைபாகம் \times விருத்தி கோணம்ச அறைவிட்டம்)
 \therefore ஷை = $\frac{1}{2} \times 2 \pi r \times L = \pi r L$.

கூருருளைப் படம். (AOBC)ஐக் கவனி:

இதில் $\angle (OCB = OCA)$ ஒரு நேர்க்கோண முக்கோணமாகையால்

$$(OB)^2 = (OC)^2 + (CB)^2$$

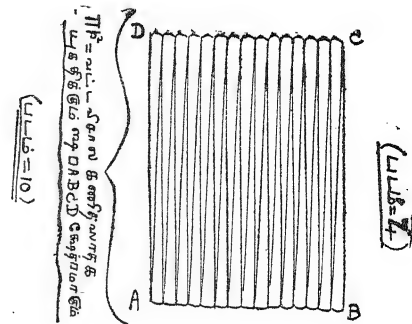
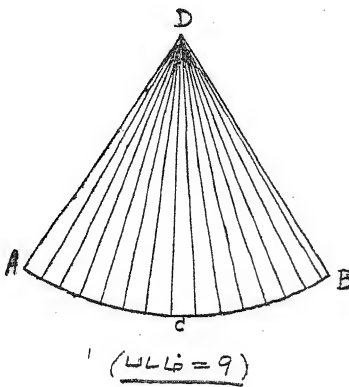
அதாவது $L^2 = h^2 + r^2$. ஆகையால்.

வளைவுத்தலத்தின் பரப்பு

$$= \left\{ \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = \pi r (h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

(அடிப்பாகத்தின் பரப்பையும் இத்துடன் கூட்டினால் கூருருளையின் மொத்தப் பரப்பு) = $\pi r L + \pi r^2 = \pi r (L + r)$ அல்லது இதனின் = $\pi r (r + \sqrt{h^2 + r^2})$.

குறிப்பு:— உயாமென்பது எப்பொழுதும் செங்குத்துயறத் தையேதான்
குறிக்கும்:—



(ii) கோலே காட்டிய () - 10 ஆகிய இருபடத்தையுக்கவனி:—

கூருருளையின் வளைவு பக்கம் அநேக சிறிய முக்கோணங்களால் ஆனவை என்று கருதிப்பார். [படம் (அ) வைப்பார்] படம் (ஆ) வாக அமைக்கப் பட்டாற்போல் இம்மூக் கோணங்களை அமைத்ததாகக் கருதுவோம் முக். கோணங்கள் சிறியதாகச், சிறியதாக இவைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகும். முக்கோணங்களின் பரப்புகளின் மொத்தம் = $(ABCD \square)$ என்ற நீண்ட சதுரப் பறப்பினுடைதற்குச் சமம் = $(AB \times BC)$. இங்கே AB = கூருருளையின் அடிப்பாகத்தின் சுற்றளவிற்கு பாதி. BC = கூருருளையின் சாய்வு (L) உயறம் ஆகையால்:—

(கூருருளையின் வளைவு தலப்பறப்பு) = $[(\pi r L) = (\frac{1}{2} \times 2 \pi r \times L)]$
(மொத்த தலப்பறப்பு) = $(\pi r L + \pi r^2) = [\pi r (L + r)]$ என்பதாம்.

இதுபோல் வந்த சேதந்தாங்களை மேல் குத்திர உதவியால் கணித்துக் கொள்ள வேண்டியதாகும்.

இக்கூருருளைச் சம்பந்தமான கணக்குக்கு உதாரணம்:—

ஒர் நெல் (தானியம்) அம்பாரம் ஒழுங்கான கூருருளை வடிவத்தில் குவிந் திருக்கிறது. இதன் தானிக்கும் (உச்சிக்கும்) அடிக்கும் உயிசு (L) என்கிற சாய்வான உயறம் = 13 அடி. இதன் சுத்தளவோ சமார் = 31.42; ஆகையால் இவ்வம்பாருத்தின் பொருத்தக் கணக்குழியடி என்ன, $1\frac{1}{2}$ அடி உயரம் $1\frac{1}{4}$ அகலம் மாக்காலால் சுத்தனை மாக்கால் இருக்கும்: கலம் முதலிய அளவில் இவ்வம்பாரு அடிக்குறுக்களையும் செங்குத்துயரமும் என்னென்ன இருக்கும்.

என்றால்:—

31.42

$(\pi = 3.1416) = 10$ அடி குறுக்களவாகும் கீழே அம்பாற அகலம்: (1).

செ 10ன் பாதியின் கீழ் அரைவிட்டம் = 5. அடியாகும்;

செ அம்பாறச் செங்குத்தய அடி = $(13^2 - 5^2)$ (2).
= $169 - 25 = 144 = 12^2$.

ஆகையால்

$$\text{அம்பாரச் செங்குத்துயரம்} = 12 \text{ அடி} \quad \dots(3)$$

$$\text{அம்பாத்திண்டிக்குழியின்} = (3.1416 \times 5 \times 5) = 78.54 \text{ அடி.} \quad \dots(4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{வளைவுத் தலமென்னும்} \\ \text{கூருருளையின் மேல் தலப்} \\ \text{பறப்பு (மேற்பாப்புக்குழி)} \\ \text{(இதில் கீழ்தலப்பறப்புச்} \\ \text{சோஷில்லை)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} = (\pi r L) = (5 \times 3.1416 \times 13) \\ = (15.708 \times 13) = (65 \times 3.1416) \\ = (204.204); \text{ அடி} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ (\text{மேல்தலப்பாப்பு} + \text{கீழ்தலப்பு}) = (\text{ஆகவே}) = (204.204 + 78.54) \text{ ரு} \\ \{ \text{மொத்தத் தலப்பாப்பினுடைய அடி} \} = (282.744) \end{array} \right. \quad \dots(6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ (\text{கூருருளைக் கனபரிமாண மாகிய;} \\ \{ \text{இவ்வம்பாரச் கனக்குழியடிகளுக்} \\ \{ \text{குச் சமம்) } \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h \right) \therefore \text{இதற்கு} = 26.18 \times 12 = (314.16) \dots(7)$$

மரக்கால் உயரம் = $1\frac{1}{2}$ அடி. அகலம் $1\frac{1}{4}$ அடி. எப்போதும் மரக்கால் வட்டரூபமாகவே யிருப்பதால்:- இதன் விட்டம் = $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \therefore \frac{1}{2}$ விட்டம் = $\frac{5}{8} = (\frac{5}{4} \times \frac{1}{2}) \therefore$ இதன்குழி = $3.1416 \times \frac{25}{64} = .0490875 \times 25 = 1.2271875 =$ (இதே ஷெ மரக்காலின் குழி)

$$\therefore \text{ஷெ மரக்கால் கனக்குழியின்} = 1.2271875 \times (1\frac{1}{2}) = 3/2 = 1.84078125$$

$$\therefore \left(\frac{\text{அம்பாரச் கனக்குழியடி} = 314.16000000}{\text{மரக்கால் கனக்குழி அடி} = 1.84078125} \right) = \left(\frac{314.160}{1.841} \right) = (170.646) \text{ மரக்கால்.}$$

ஷெ (1.841) கன அடி மரக்காலால் (314.160) கன அடியம்பாரம்; ஆகும் நெல் மரக்காலின் = (170.646) என்றமீதன் = 171.

இம்மரக்கால்களின் சலம் = $[\frac{171}{12}] = 14 \text{ எ. 3 ந.}$ (அதாவது பதினான்கு களே முக்குறுணி) = $14\frac{3}{4}$ என்பது.

மற்றும் வந்தனவேல்லாமிப்படிப் பார்த்துக்கொள்ளவும்.

ஒழுங்கான வட்ட உருளை என்பது கீழே சொன்ன மரக்கால் உயரம் $(1\frac{1}{2} = \frac{3}{2})$ அடி இதன் குறுக்கு விட்ட மென்கிற வகல அடி $(1\frac{1}{4} = \frac{5}{4})$ இதற்கு மேலே மரக்காலுக்குக் காட்டிய மொத்த கன அடி கணித உதாரணமே தான் ஒழுங்கான வட்ட உருளைக்காகும்.

மற்ற இதன் விசாலம் முதலிய சணிப்பவை சுலபமே யாகையால் உதகரிக் காமல் விடப் பட்டதார் என்பது.—

(படம் 11) இதற்குரிய சில விவரத்துக்குறிய குறிப்புகள்:—

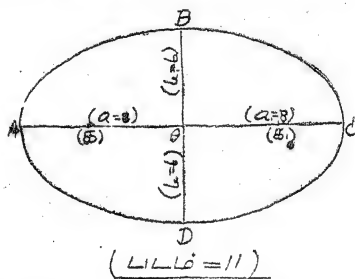
இந்நீள் வட்டச் சம்பந்தமான (θ = கர்ப்ப கேந்திரம்) அல்லது மத்ய கேந்திரம், இக்கேந்திர பிந்ததைவ முக்யஸ்தான மாப்க் கொண்டு இந் நீண்ட வட்ட மேற்படுகெதில்லை. ஆகையால் (க); (க₁) என்கிற ஸ்தானங்களில் உள்ள

மண்டல (நீள் வட்ட ஸாதகபிந்துக்கள் [அதாவது இரு கேந்த் (நாடி)கள்] ஏற்படு மென்பதாம். இவ்விரு நீள் வட்ட நாடி (க க₁) க எப்போதும் இவ்வட்டத்துள்ளடங்கிய நீண்ட விட்டத்தில் (வியாஸத் தான் நிற்கும். (1).

வாஸ்தவத்தில் வான வெளியில் சலித்துச் சுற்றும் கிரக வட்ட (வக்ர) ரே [(a, b) க் களின் வித்யாஸ அறை விட்டத்தையுடைய) (o ABCD)] பை அனுசரித்திருக் கின்றது—சுமாராகப்பார்க்க அந்தக் கிரகங்களின் போக் குறிய நீள்வட்டரேகை போலத் தோன்றலாகும் a, b ($\frac{1}{2}$ வியாசங்களு அரை விட்டங்களும் சற்றேரக் குறைய (சுமாராக) ஒன்றாகவே இருக்கு ஆகையால் பூர்விக வானசாஸ்திரிகளால் நீள்வட்டச் சம்பந்தபான கிரக(மட பலஸாதனமும் ஸமவட்டத்தை யனுஸரித்தேயுள்ளது.

மற்ற விவரம் பொது விதியில் பார்—(AC = 2a, BD = 2b) இப் பற்பல வித்யாஸமாகலம்.

மேலும் நீண்ட வட்டத்தைப் பற்றிய விஷயம்:—



மேலே (படம் 11-ல்) காட்டிய கேந்தாம் போல் உள்ளவைகட்கு வட்ட மத்திய கேந்தாம் (ஸன்ட்ரல்)கள் இரண்டுண்டு. ஆகையால் இதற்குரிய அக் விட்டம் (OB = OD = b, AO = OC = a) அறை விட்டம் மத்திய கேந்தக் கோணங்கள் தோறும் வேறுபட்டுக் கொண்னே b யிலிருந்து a வறைய விருத்தியையையும் இம்முறையிலேயே குறைவுமடையும். என்பதை முதல் இவ்வித நிலங்கட்குக் கவனிக்க வேண்டியதவசியம்.

இங்கு தெரிந்த அரைவிட்ட வித்யாஸமான a, b க் களைக் கொண்டு நீண்ட வட்டமாகிய (o ABCD) யின் நீண்ட வட்டக் கோடு கணிக்க:—

விபரம்:—

இருவித விட்டங்களின் வர்க்கங்களைக் கூட்டிப் பரீட்சைத்ததை மூலம் செய்தால் (மூலித்தால்) ($2\pi = 2பை$)யைப் பெருக்கியதே நீண்ட வட்டரேகை.

பெரு அரை விட்டம் சிறு அறை விட்டம் π. இம் மூன்று துகைகளை ஒன்றுக் கொண்டு பெருக்கியதே நீண்ட வட்டக்குழி என்கிற நீண்ட வட்ட தினுடைய விசாலமாம்.

இதன் சமீகரணம்:—

$$(\text{நீண்ட வட்டரேகை}) = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

... (1)

$$\left\{ \left(\begin{array}{l} \text{நீண்ட வட்டக்குழி யல்லது} \\ \text{நீண்ட வட்ட விசால வீஸ்திரணம்} \end{array} \right) \right\} = (\pi \cdot a \cdot b) \quad \dots (2).$$

செக்கு உதாஹரணம் கீழ் காண்க:—

செ. கண்ட நீட்ட வட்ட அறை விட்டங்களாகிய $a = 8$, $b = 6$ ஆனால்
($\odot ABCD$) என்கிற நீண்ட வட்டரேகை என்ன; செ நீண்ட விட்டக்குழியளவு
மென்ன வென்றால்:—

$$\odot ABCD = 44.42851 = \left\{ \begin{array}{l} (2 \times 3.1416) \sqrt{\left(\frac{8^2 + 6^2}{2} \right)} \\ = \sqrt{6.2832(32 + 18)} \\ = (6.2832) \times \left\{ \sqrt{(50)} = (7.071) \right\} \end{array} \right.$$

இதற்கு மற்றோர் வழி சுலபத்தில்

செ $\odot ABCD = 43.9824 = \pi (a + b) = 3.1416 \times (8 + 6)$ இது
அதை விட ஸ்தூல அளவைத்தான் காட்டும்: அதேவேகு துட்பவிடை.

$$\left\{ \left[\begin{array}{l} \text{நீண்ட வட்ட } (\odot ABCD \text{யின்}) \\ \text{குழி (ப்பாப்பு) விசாலம்} \end{array} \right] \right\} = 150.7968 = (\pi \cdot a \cdot b) (3.1416 \times 8 \times 6).$$

என்பதாம்.

மற்றும் வந்தனை வெல்லாமிப்படி பார்த்துக் கொள்ளவும். (புத்தக
விஸ்தாபயத்தால் இதோடு இவ்விஷயங்கள் நிறுத்தப்பட்டன).

விருத்தம்:—

ஒருபதினாறுநூடே

உத்திடுமிருபதுக்கே—

வரு நிலமென்ன வென்னில்;—

மருவிய ஒன்றுக்கோரா கவும் வஞ்சுது வீரே—(46)—

என்பது:—

கீள் மேல்-யிசு (16)க்கு தென் மடல் (உயி = 20) ரு (ஒன்றுக் கொன்று
நீழ்ச்சியில் விசித விசாலப் பரிமாணம்) யெத்தனை யென்னில்:—

யிசு (16)யும் (ய = $\frac{1}{16}$)ல் கழிக்க-க (1), உயி (20)யும் — ய ($\frac{1}{16}$)ல் களிக்க-
கவ ($1\frac{1}{4}$) ஆதலால்:— கவ ($1\frac{1}{4}$) ரு-ப-ரு—(மா-காணி) என்பது.

யெதுவுமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்.—

வெண்பா:—

பாராய்கிள்மேல் பனிரண்டே:தென்மடலே

ஓராமல் நிலமுக்காணியாம் நேராக—

வந்தநில முந்திரியாய் மாருபதினாரினிலே

தொந்தமுரு கைக்கீய்ந்து சரிசொல் = (47).

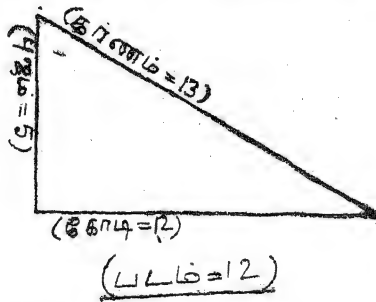
என்பது:—

கீழ்மேல் - யிசு (12) ரு தென் யி அரியாமல் நிலம் சூ (3/80 = முக்காணி
யானால் தென் யி சொல்லறியும்) வகை—

சூ (முக்காணி) நிலத்தையும் முந்திரிப்படுத்த - மெ (12). இதை முந்திரி - மசு (16). பென்பது - மசு (16)ல் மாற - மசு (16) $(192 = 12 \times 16)$ இதை (தெரிந்த) ஒரு கைக்கோல் - மெ (12) முக்குடுக்க ஈயவு மசு (16) ஆதலதென் மீ (நீளக்கோல்) மசு (16) என்பது:...

இவ்விதங் கணிதகர்த்தா- நிலப்பறப்பும் ஓர் பக்க நீளமும் தெரிந்தால் மற்ற பக்கங்கணிக்க வழி கூறுகிறார். கீழ்மேல் தென்வடல் இருநீளமுந் தெரிந்தபே அந்நிலம் மனை (விசாலங்கணிக்க) பறப்புக்கணிக்க முன்னே கூறி இருக்கிற இவைகள் மூன்றவயவங்கனையுங்கணிக்க; வேறு சில வழிகளும் இருக்கின்ற கூடியவறையில் வெகு சுருக்கமாக அவ்வழிகளை இனி விவரிக்கப் படுகின்றன:—

இவைகள் (கேதாமிதி) ஜ்யாமிதி விகிதங்கள் என்று சொல்லப்படும்:—



(படம் 12) ஐக்கவனி:—

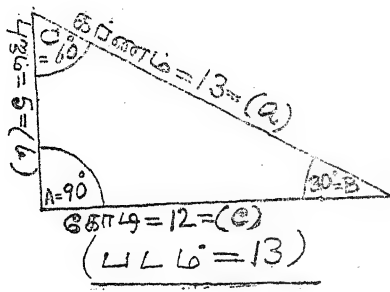
இந்த கேதாமிதி காரணம் = 13, கோடி = 12, புஜம் = 5. அமைந்திருக்கிறது.

இந்த கேதாமிதிபந்தமாக முதலில் கவனிக்க வேண்டியவைகள் சில வருமாறு:—

இவ்வித முக்கோண கேதாமிதி ஜ்யாமிதி (சேர்க்கோண முக்கோண) த கோணகேதாமிதிமென்றும், அஜ்யாமிதி த்ரிகோண (விஷமத்ரிகோண) விஷம முக்கோண கேதாமிதிமென்றுமிருவிதம்:—

ஸமத்ரிகோணத்தில் ஏதாவது இருபுஜங்களின் சேர்க்கை ஸ்தானத்தி கோணம் (90°) பாகையாக இருக்கும். இதற்கெதிர்புஜமே காரணக்கோடாகு. இதைவிட மற்ற இருபுஜங்களும் சிரிதாகவே குறைந்திருக்கும். கோணங்களு அந்தந்த புஜத்துக்கெதிரானவைகள் (90°) பாகைக்குக் குறைந்தே இருக்கும். ஆகவே கோணங்களின் பாகையாதிகள் மூன்றும் ஒன்று சேர்க்க மொத்தம் $= (180^\circ)$ வந்துவிடும்:—

விஷமத்ரிகோணத்தில் எந்த புஜங்களின் சம்பந்தக் கோணங்களும் (90°) ஆக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. ஆகையாலதற்கு விஷம (த்ரி)புஜ முக்கோணமென்று பெயர் வந்தது. மற்றவையாவும் ஸமகோண முக்கோண துக்குச்சொன்னது போலவேயாகும்:—



இங்கு (180°) க்கு $= (90^\circ + 60^\circ + 30^\circ)$
 $\therefore C = 60^\circ = (180^\circ - 90^\circ - 30^\circ);$
 $B = 30^\circ = (180^\circ - 60^\circ - 90^\circ)$
 $A = (180^\circ - 60^\circ - 30^\circ) = (180^\circ - 90^\circ)$
 $= 90^\circ;$
 ஆகையால் (180°) று $= [(A + B + C)]$
 என்றும்

இங்கே கோடி $= c = 12$
 செ புஜம் $= b = 5$
 செ கர்ணம் $= a = 13$ } \therefore

$$a^2 = c^2 + b^2 = (c-b)^2 + 2cb \quad (1)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad (2)$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = (a+c)(a-c) \quad (3)$$

என்று ஸம்த்ரிகோண (ஸாஜாத்யத்ரிகோண) ஸம்பந்தத்தைப்பற்றிய வரைபில் சூத்ரங்கள்:—

இதன் வியக்தவிளக்கம்:— ஸாஜாத்யத்ரிகோணத்தில் கர்ணம், புஜம், கோடி என்று மூன்று புஜ (கோட்கு) உருவ (அவயவ)ங்கள், கர்ணஸம்முகமான இரு புஜசந்திப்பு ஸ்தானக்கோணம் ஸதா (90°) பாகமே உள்ளது, மற்ற கோடி ஸம்முககோணம் புஜ கர்ணஸம்பந்த ஸ்தலத்திலும் புஜ ஸம்முககோணம் கோடி கர்ண ஸம்பந்தஸ்தலத்திலும் இருக்கும். இவ்விரண்டுக் கூடல்களும் ஸதா (90°) ஆகவேபுள்ளது. இவ்விதம் கோண உருவ அவயவங்களும் மூன்று:—

கர்ணவர்க்கத்தில் கோடிவர்க்கத்தைக் கழித்தால் புஜவர்க்கமும், கர்ண வர்க்கத்தில் புஜவர்க்கத்தைக் கழித்தால் கோடிவர்க்கமும், கோடிவர்க்கத்தோடு புஜவர்க்கம் கூடினால் கர்ணவர்க்கமும் வருமென்பதாம்:— (1)

அல்லது.

கோடியை புஜத்தால் பெருக்கி ரட்டித்தோடு கோடி புஜாந்தரவர்க்கம் கூடினால் கர்ண வர்க்கம் வரும்.

கர்ணத்தில் கோடியைக் கூட்டியதை, கோடியைக் கர்ணத்தில் கழித்ததால் பெருக்க புஜவர்க்கம் வரும்.

கர்ண புஜக்கூடல்; கர்ணபுஜ வித்யாசத்தால் பெருக்கின ஸித்தகையே கோடிவர்க்கமாகும்:— (2)

இதன்ஸ்மீகாரணம்

$$(கர்ண)^2 = (கோடி)^2 + (புஜ)^2$$

$$(கோடி)^2 = (கர்ண)^2 - (புஜ)^2$$

$$(புஜ)^2 = (கர்ண)^2 - (கோடி)^2 \quad (1)$$

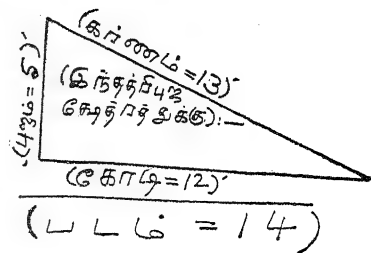
$$(கர்ண)^2 = \{ 2 (கோடி \times புஜம்) + (கோடி - புஜம்)^2 \}.$$

$$(கோடி)^2 = \{ (கர்ண + புஜ) (கர்ண - புஜ) \}.$$

$$(புஜ)^2 = \left\{ (கர்ண + கோடி) (கர்ண - கோடி) \right\}; \quad (2)$$

களைக் குறுக்கு உதாரணம்:—

பக்கத்தில் காட்டிய படத்தில் கர்ணம் = 13,
கோடி = 12 \therefore புஜமென்னவென்றால்
(13² - 12²) = (169 - 144) = (25) = (5)²
ஆகையால் புஜம் = 5 ஆம் (1) —
கர்ண = 13, புஜ = 5, கோடி = ? வென்றால்:



$$(13^2 - 5^2) = (169 - 25) = (144) = (12)^2$$

$$\therefore \text{கோடி} = 12 \text{ ஆம்}$$

புஜ = 5, கோடி = 12; கர்ண = ? எனில்:—

$$5^2 + 12^2 = (25 + 144) = 169 = (13)^2$$

$$\therefore \text{கர்ண} = 13. \text{ என்பது}$$

(3) —

மற்றோர் வழிப்படி இம் 3ம் கணிக்க:—

$$(கர்ண)^2 = (13)^2 = 169 = 2 \times 12 \times 5 + (12 - 5)^2 = (120 + 49)$$

$$\therefore \text{கர்ண} = 13.$$

$$(கோடி)^2 = (13 + 5)(13 - 5) = (18 \times 8) = 144 = (12)^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore \text{கோடி} = 12.$$

$$(புஜ)^2 = (13 + 12)(13 - 12)(25 \times 1) = (25 = 5)^2 \quad (2)$$

$$\therefore \text{புஜம்} = 5 \text{ ஆகும்}$$

(3) —

பின்னத்திலும்:—

இங்கேயும்:—

$$(கர்ண)^2 = 1 = \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{9}{25} + \frac{16}{25} \right\} = \left(\frac{25}{25}\right) \text{ இதன்மூலம்}$$

$$= \left(\frac{5}{5}\right) = 1. \text{ ஆகும்.} \quad (1) —$$

$$(கோடி)^2 = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\therefore \text{கோடி} = \frac{4}{5}. \text{ ஆகும்.} \quad (2) —$$

$$\text{புஜவர்க்க} = (புஜ)^2 = \left(1 - \frac{16}{25}\right) - \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\therefore \text{புஜ} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}. \quad (3) —$$

இவைகளை மற்றோர் விதத்தாலும் கணிக்கலாம்.

$$(கர்ண)^2 = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{5} + \frac{24}{25}\right)$$

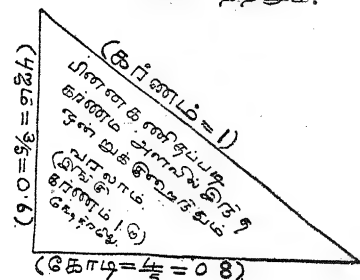
$$= \frac{25}{25} = \left(\frac{5}{5}\right)^2 \therefore \text{கர்ண} = 1. \quad (1) —$$

$$(புஜம்)^2 = \left(1 + \frac{4}{5}\right) \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{9}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \therefore \text{புஜத்தின்} = \frac{3}{5}; \quad (2) —$$

$$(கோடி)^2 = \left(1 + \frac{3}{5}\right) \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \therefore \text{கோடிக்கு} = \frac{4}{5} \text{ என்றாகும்} \quad (3) —$$



மற்றும் வருவனவெல்லாமிப்படிக்க கொள்க:—

இவ்வித வழிகள் ஸமத்ரி கோண சேஷத்திரத்திலும், ஸமசதுரம், நீண்ட நாற் சதுரமிவைகளிலும் வெகுவிதத்தில் உபயோகமாகின்றன. விவரங்கள் யாவும் மேலே படிக்கத் தெரியும்.—

இங்கே இஷ்டமான கோடி புஜகர்ணங்களில் ஏதாவது ஓர் அவயத்தையும் இஷ்ட லக்கத்தையுங்கொண்டு மற்ற இரு அவயங்களைக் கணிக்கும்விவரம்

இவ்விதமேற்படும் சேஷத்ரங்கள் ஜாத்ய த்ரிகோண (நேர்க்கோண முக்கோண) ங்களுக்கே உரியன.

(1) இஷ்ட புஜத்தை, ரட்டித்த இஷ்டலக்கத்தால் பெருக்கு, இதை இஷ்டலக்க வர்க்கத்தில் ஒன்று குறைத்ததால் வகுத்த ஈவு கோடி. இதை இஷ்டலக்கத்தால் பெருக்கியதில் புஜத்தைக் கழித்தால் கர்ணமாகும்.

இதற்கு உதாரணம்

(1)—

இஷ்டபுஜ = 12, இஷ்டலக்க = 2

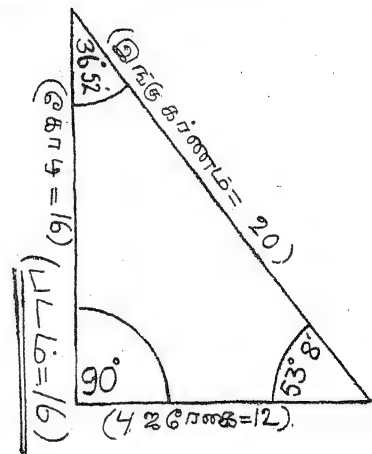
∴ (கோடி) = (16) ரு

$$= \frac{2 \times \text{இஷ்டலக்க} \times \text{இஷ்டபுஜ}}{[(\text{இஷ்டலக்க})^2 - 1]}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 12 = 48}{(2^2 - 1) = (4 - 1) = 3} = 16.$$

(கர்ணம் = 20) ரு

$$= \left\{ \begin{array}{l} (\text{கோடி} \times \text{இஷ்டலக்கம்} - \text{புஜம்}) \\ = (16 \times 2 - 12) = (32 - 12) = 20. \end{array} \right.$$



இவ்வித உதாரணப்படி;—

(2) இஷ்ட லக்கம் 3, புஜம் 12. இவை

களால் ஏற்பட்ட கோடி = 9ம், கர்ணம் = 15 ஆகும்.

(3) இஷ்டலக்கம் 5, புஜம் = 12 இவைகளால் ஏற்பட்ட கோடி = 5, கர்ணம் = 13 என்றாகும்.

மற்றும் வரும் புஜ இஷ்ட லக்கங்கட்கு இவ்விதமே கோடி கர்ணங்கள் கணித்துக் கொள்க.

குறிப்பு:— ஆனால் இவ்விதம் இஷ்டபுஜம் = 13, இஷ்டலக்கம் = 9. இவற்றால் சரியானபடி கோடி கர்ணங்கள் ஏற்படவில்லை. மேலே காட்டிய விவரணம் படிக்கு என்பதுங் கவணிக்குக.

இதற்கு வேறுவிதமான வழியுமுண்டு:

விவரணம் (2)

இஷ்ட புஜவர்க்கத்தை இஷ்டலக்கத்தால் வகு ஈவை ரண்டிடத்தில் வை இஷ்ட எண்ணை ஒன்றில் சேர், மற்றொன்றில் கழி வந்த தொகைப்பாதி யே கர்ணமும் கோடியுமாம்.

இதற்கு உதாரணம்:—

இங்கும் புஜம் = 12, இஷ்டலக்க = 2.

$$A = \left\{ \frac{(\text{புஜம்})^2}{(\text{இஷ்டலக்கம்})} \right\} = \left\{ \frac{(\text{புஜம்} \times \text{புஜம்})}{(\text{இஷ்டலக்கம்})} \right\}$$

கோடி = $\frac{1}{2} (A - \text{இஷ்டலக்கம்})$;

கர்ணம் = $\frac{1}{2} (A + \text{இஷ்டலக்கம்})$

$$\text{கோடி} = \frac{1}{2} \left(\frac{12 \times 12}{2} - 2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{144}{2} - 2 \right) = \frac{1}{2} (72 - 2) = \frac{1}{2} (70) = 35.$$

$$\text{கர்ணம்} = \frac{1}{2} \left(\frac{12 \times 12}{2} + 2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{144 + 2}{2} \right) = \frac{1}{2} (72 + 2) = (74) = 37.$$

இவ்விதம் இஷ்ட எண் 4 ஆல் ஏற்பட்ட புஜகோடி கர்ணங்கள் = 12, 16, 20; 6ல் ஏற்பட்டவை முறையே 12, 9, 15 என்றுமாகிறது.

இஷ்ட கர்ணத்தாலும், இஷ்ட வெகுலக்கத்தாலும் இக்கர்ண சம்பந்தியான வெகு கோடிபுஜங்களைக் கணிக்க:—

கர்ணாட்டிப்பை. இஷ்டலக்கத்தால் பெருக்கியதை, இஷ்ட எண் வர்க்கத்தோடு ஒன்று சேர்த்த துகையால் வகு. ஈவே கோடி. இக்கோடியை இஷ்ட எண்ணால் பெருக்கியதில் கர்ணங்கழிந்த மிச்சமே புஜமாகும்.

(இதற்குச் சமீகரணம்).—

$$\text{கோடி} = \left\{ \frac{(2 \times \text{இஷ்ட எண்} \times \text{கர்ணம்})}{\left\{ (\text{இஷ்ட எண்})^2 + (1) \right\}} \right\};$$

புஜம் = (கோடி \times இஷ்ட எண் - கர்ணம்).

இதற்கு உதாஹரணம்:— கர்ண = 85. இஷ்டலக்க = 2

$$\therefore \text{கோடி} = 68 = \frac{2 \times 2 \times (\text{கர்ண} = 85)}{(2^2 + 1) = (4 + 1) = 5} = \frac{340}{5} = 68.$$

$$\text{புஜம்} = (51) = (68 \times 2 - 85) = (136 - 85) = 51.$$

இஷ்ட எண் 4 ஆல் ஷே கர்ண = 85க்கு ஏற்பட்ட கோடி = 40, புஜம் = 70. ஆகும்.

(2) இதற்கு மற்றோர்வழி:—

கர்ணாட்டிப்பை, இஷ்ட எண்வர்க்கத்தோடு ஒன்று சேர்த்த துகையால் வகு; ஈவைக் கர்ணத்தில் கழித்ததே கோடியும், ஈவையே இஷ்ட எண்ணால் பெருக்கியது புஜமுமாகும்:—

இதற்குச் சமீகரணமிங்கு:—

$$B = (\text{சுவு}) \left\{ \frac{\text{கர்ணம்} \times 2}{\{(இஷ்டஎண்)^2 + (1)\}} \right\}$$

கோடி = (கர்ணம் - B); புஜம் = (B × இஷ்ட எண்).

இஷ்ட கர்ண = 85, இஷ்ட எண் = 2 இவற்றால்:—

கோடி புஜங்கணிக்க உதாரணம்:—

$$B = (\text{சுவு}) = \frac{85 \times 2}{(2^2 \times 1)} = \frac{170}{5} = 34.$$

$$= (34 \times 2 = 68,) = \text{புஜம்} = 68.$$

$$\text{கோடி} = (85 - 34) = 51.$$

என்பதாகும்:—

இவ்வித இஷ்டஎண் = 4 ஆலும், 85 கர்ணத்தாலும் ஏற்பட்ட

கோடி = 75, புஜம் = 40:—

இங்கு பெயருக்கு புஜ கோடி என்ற ஸப்க்களையே தவிர கர்ணமென்றும் இரு புஜமென்றும், அல்லது இருகோடிகளென்றும் சொல்வதே உலகவழக்கி உள்ளது கவனிக்குக — இதனால் ஒன்றும் ஸ்வரூப (உருவ) பேதமில்லை:—

இருவிதமாகிய இஷ்ட எண்களாலே (லக்கங்களாலே)யே, கர்ணம், புஜம், கோடி ஆகிய ஜாத்ய த்ரிகோண சேஷத்ர சம்பந்தமான மூன்றவயங்கனையுங் கணிக்க:—

இருவித இஷ்ட எண்களை ஒன்றுக் கொன்று யெருக்கியதை ரட்டித்ததே கோடி. இருவித எண்களின் வாக்க வித்யாசமே புஜம். இருவித எண்களின் வாக்க(க் கூடுதலே) சேர்க்கையே கர்ணமுமாம்.

இதற்குச் சமீ கரணம்:—

இங்கு இருவித இஷ்ட எண்களின் ஒன்றை (A) என்றும், மற்றொன்றை (B) என்றுங் கொண்டால் அப்போ:—

ஸா ஜாத்யத்ரி புஜாவயவங்களாகிய கோடி, புஜ, கர்ணங்கள் கணிக்க:—

$$\left. \begin{aligned} (\text{கோடி}) &= (2 \times A \times B,) & (1) \\ (\text{புஜம்}) &= (A^2 - B^2) & (2) \\ (\text{கர்ணம்}) &= (A^2 + B^2) & (3) \end{aligned} \right\} \text{என்பதாகும்.}$$

இதற்கு உதாஹரணமிங்கு:—

இரு இஷ்ட எண்களில் $A = 3, B = 2$, ஆகக்கொண்டால்:—

கோடி புஜ கர்ணங்களை ஸமீகரணப்படிக்க கணிக்க.—

கோடி $= (2 \times A \times B) \therefore = 2 \times 3 \times 2 = 12$ ஆகும்.—

புஜம் $= (A^2 - B^2) \therefore = (3^2 - 2^2) = (9 - 4) = 5$ ஆகும்.—

கர்ணம் $= (A^2 + B^2) \therefore = (3^2 + 2^2) = (9 + 4) = 13$ ஆகும்.—

இவ்விதமே இஷ்ட எண்களை ($A=5, B=4$) ஆகக் கொண்டலப்போ:—

கோடி $= (2AB) \therefore = 2 \times 5 \times 4 = 40$.

புஜம் $= (A^2 - B^2) \therefore = (5^2 - 4^2) = (25 - 16) = 9$.

கர்ணம் $= (A^2 + B^2) \therefore = (5^2 + 4^2) = (25 + 16) = 41$.

$\therefore (\text{கர்ணம்})^2 = (\text{கோடி})^2 + (\text{புஜம்})^2$

$(\text{இக்கர்ணம்})^2 = 1681 = (1600 + 81) = (41^2 = 1681)$
 $= (40^2 = 1600) + (9^2 = 81)$ என்றும்.

அல்லது $A = 63, B = 60$, எனக் கொண்டாலும்:—

(கோடி) $= (2 \times A \times B) = 2AB \therefore = 2 \times 63 \times 60 = 2 \times 3780 = 7560$.

(புஜம்) $= (A^2 - B^2) \therefore = (63^2 - 60^2) = (3969 - 3600) = 369$.

(கர்ணம்) $= (A^2 + B^2) \therefore = (63^2 + 60^2) = (3969 + 3600) = 7569$.

இங்கே:— $(\text{கர்ணம்})^2 = \{ 7560^2 = (57289761) \}$

$= \{ (7560^2 = 57153600) + (369^2 = 136161) \};$

என்று இவ்விதமெல்லாம் இஷ்ட இருஎண்களின் படிக்குக் கோடி புஜ கர்ணங்கள் அமையும்.

முன் சொல்லியவைகளையிட மேலமைக்கப்பட்ட ஸூத்ர (ஸமீகரண) ஸாதக கோடி புஜகர்ணங்களே எங்கும் எப்போதும் வித்யாஸமடையாது என்பது

இனி ஜாத்யத்ரிகோணரேகா கேஷத்ரத்தை ஸஜாதி (ஏகஜாதி = ஒரேஜாதி) யாகவே சம்பந்தித்த மற்றோர் த்ரிகோண கேஷத்ரத்தை முன் தெரிந்த கேஷத்திர உருப்புகளால் கணிக்க வேண்டிய விசிக விவரணம்:—

இந்த கேஷத்ரத்தைப் பற்றி முதலில் தெரிந்து கொள்ள வேண்டிய சில விஷயங்கள் இங்கு

என்பவைகள்.

அவசியங் கவனிக்க வேண்டியவைகள்.
தெரிய வேண்டிய ஜாத்ய(ஸம)த்ரி

கோண கேட்டம் = $\angle DAB$. என்ற பெரிய வட்டத்திற்கோணம். c, c_1 இவ்விருபுஜங்களும் சேரும்ஸ்தானமாகிய $\angle A = 90^\circ$ பாகையாகிய நேர்க்கோணமாகும்.

இவ்விதமே a; b புஜங்கள் சந்திக்குமிடமான $\angle C = (90^\circ)$ யும் தொண் ணுறுபக்கங்கள் கொண்ட ஸமத்ரி கோணமாம்.

15. இதில் தெரிந்த திரிகோணம் $\angle DCA$ என்பது. இதில் தெரிந்த புஜங்கள் ($c = 260$, $b = 240$, $a = 100$). இவைகளால் மற்றிய abc ; புஜங்களை a ம் பந்தித்த a_1 , c_1 ; புஜங்கள் இரண்டும் தெரியவேண்டியதாக இருக்கிறது.

இதற்குக்கேவலம் தரைமூசிக கணிதத்தை மாத்திரம் உபயோகித்தால் போதுமா:—

இதற்குச் சமீ கரணம் :—

$$(AB) = (c_1) = \frac{b \times c}{a} = \frac{(AC)(AD)}{(DC)} = \frac{240 \times 260}{100} = 24 \times 26 = \mathbf{624}.$$

$$(1 \parallel) \quad \frac{b^2}{a} = \frac{(AC)^2}{(DC)} = (CB) = \frac{(240)^2}{100} = (24 \times 24) = \mathbf{576};$$

அல்லது :—

$\therefore (CB) = (a_1) = (DB - DC)$ என்கிறீம்.

$$\therefore \text{இந்த (DB)} = \frac{(AD)^2}{(CD)} = \frac{c^2}{a} = \frac{260^2}{100} = 26 \times 26 = 676.$$

இந்த (676ல்) தெரிந்த (100ஐ) கழித்தாலும் ஷெ (a₁)க்குரிய புஜம் = 576
= (676 - 100)ம் வந்து விடும்:—

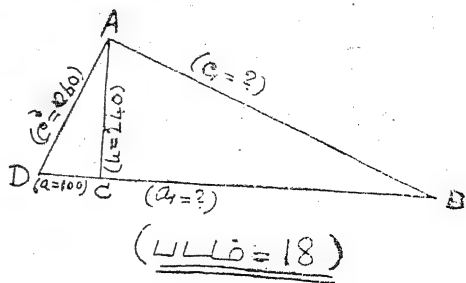
இஷ்டம் போல் செய்துக் கொள்க.

இதற்கு பற்றோர் வழியு முண்டு:—

இங்கு $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 90^\circ$,

என்று அமைந்தால் தான் இவரி
சொல்லப்படும் ஸ்கூலாம் இந்த
சேதாரேகா ஸாதந்ததுக் குறிய
தாகும்:—

மற்றைய எல்லாக் குறிப்புகளையும்,
மேலே (படம் 17க்குச்) சொல்லிய
படி கிரகித்துக் கொள்ளவும்.



இங்கே $a = 100$; மற்ற விவரம் மேலே பார்க்க—

$$2a a_1 = c^2 + b^2 - a^2;$$

இந்த ஸமீகரணப் பிறப்பின் ஸாதக யுக்தி விவ. நாமிக் கே நிரூபிக்கப் படுவதை கவனிக்குக.

$$(a + a_1)^2 = (c^2 + c_1^2); c_1^2 = a_1^2 + b^2;$$

$$\therefore (a + a_1)^2 = (c^2 + b^2 + a_1^2).$$

$$\therefore (a^2 + 2aa_1 + a_1^2) = (c^2 + b^2 + a_1^2) = 2aa_1 = c^2 + b^2 - a^2.$$

\therefore இதை ஆதாரமாகக் கொண்டு பிறகு:—

ஷெ $a = 100$, $b = 240$, $c = 260$, என்று தெரிந்த இதிலிருந்து.

தெரிய வேண்டியதான புஜம் (a_1) ஐக் கணிக்க:— மேற்கூறியபடி ஸூத்ரத்தை உபயோகிக்க:—

$$(100 + a_1)^2 = (260^2 + 240^2 + a_1^2)$$

$$= (100^2 + 200a_1 + a_1^2) = (260^2 + 240^2 + a_1^2)$$

இவ்விரு சமத்துவங்களில் ஒன்றிலொன்றைக் சுழிக்க:—

$$\{ (100^2 + 200a_1 + a_1^2) - (260^2 + 240^2 + a_1^2) \}; \text{ இதில்கவனி.}$$

இரண்டு ஸமஸ்தானத்திலுள்ள இந்த $(+ a_1^2)$ என்பது சனதில்ருணம் போக மிச்சம் = 0 ஆனதால்தன் புரம்பாக நின்றவைபோல விவரணத்தில்பார்.

$$\therefore 200a_1 = (260^2 + 240^2 - 100^2) = 200a_1 = (67600 + 57600 - 10000)$$

$$= 200a_1 = 115200 \therefore a_1 = \left(\frac{115200}{200} \right) = 576. \text{ என்பது.}$$

இதனால் ஏற்பட்ட தென்ன வென்றால்:—

$$a_1 = \frac{(c^2 + b^2 - a^2)}{2a};$$

இவ்விதமே.

$$a = \frac{(c_1^2 + b^2 - a_1^2)}{2a_1} \text{ என்பதாம்:}$$

அதாவது மேலே காட்டிய த்ரிபுஜ உருவம் $\angle DAB$ -யில் $\angle ACD$ தெரிந்து இதனால் (CB) ஐக் கணிக்கவேண்டுமென்றால், $(DC =$ புஜம், $CB =$ இது ஸம்பாதுபுஜம் அல்லது CB புஜமானால் DC ஸம்பாதுபுஜம், DB தெரியக்கூடிய கர்ணம், AB தெரியாத கர்ணம். என்று கொண்டால்)

இதற்குப் பொதுவழி:—

தெரிந்த கர்ணவர்க்கத்துடன் தெரிந்த கோடிவர்க்கத்தையும் சேர்த்து இதில் தெரிந்த புஜவர்க்கத்தைக் சுழித்த மிச்சத்தை; தெரிந்த ரட்டித்த புஜத் தால் வகுத்த ஈவே, இப்புஜத்துடன் ஸம்பந்திந்த தெரியக்கூடிய கர்ணகண்ட மாகிய மற்றோர் புஜம் வரும்:—

அதாவது இரண்டு த்ரிபுஜக் கோணங்களுக்கு ஒரே கோடியாகிய (படம்-17, 18ல் கண்டபடி) இவ்விரண்டில் ஓர் கோடி, கர்ணபுஜகள் தெரிந்து இவ்வுருப்புகளினால் மற்றய (தெரிய வேண்டிய) புஜத்தையும், இதனால் கர்ணத்தை யுற்சணிக்க இவ்வழி உருவம் முதலிய உபயோகமாம்:—

தலைகீழாக மற்றொரு உதாரணம்:—தெரிந்தவைகள்:— $a_1 = 576$, $b = 240$ என்றுங்கொண்டு மற்றப a , c க்களைக் கணிக்கவென்றால்:— மேற்காட்டியபடிக்கு:—

$$(CD = a = \frac{(AB)^2 + (AC)^2 - (BC)^2}{2(BC)}) \left\{ = \frac{(c_1^2 + b^2 - a_1^2)}{2a_1} \right\} \therefore$$

$$c_1^2 = 624^2 = 389376, b^2 = 240^2 = 57600, a_1^2 = 576^2 = 331776; 2a_1 = 1152;$$

$$\therefore CD = (a) = \frac{(389376 + 57600 - 331776)}{1152}$$

$$= \frac{(446976 - 331776)}{1152}$$

$$= \left(\frac{115200}{1152} \right) = 100 \therefore a = 100 \text{ என்பது.}$$

மற்ற கர்ணங்களாகிய (AB) (AD) (BD) இவைகளைத் தெரிந்த கோடி புஜங்களாய்த் தரல் கணிக்குக ○

இவ்வழிக்குர், முன் திறைஞ்சிக வழிக்கும் ரொருங்கிய சம்பந்தங்களைக் காண்க ○

குறிப்பு:— ஆறு முதலிய நாண்டமுடியாத (ஜகமுள்ள) இடங்களை - BC-ரேகையாக அமைத்து மேற் கூறியபடி (திரிகோண உருவமடைத்து); (BC) பைக் கணிக்கச் சலபராம்:

மற்றும் வருவனவிவ்விதமே:—

குறிப்பு:— இவ்வித சேஷதரகணிதங்கள்; கோல கணிதத்துக்கே வெகு ஆதாரம். இவ்வித மேற்படும் திறை ஞ்சிக கணிதம் கணிதப்பரஞ்சத்துக்கே வ்யக்தர்வ்யகத்த ரூபமாயுள்ள கடவுள்பே லாம்: இன்னும் விரிக்கிற்பெருகும்:—

வேறு:—

ஓர் நோர்க்கோண முக்கோணத்துடைய கோடியும் கர்ணமுஞ்சேர்ந்த துகையும் புஜமும் தெரிந்த விடத்தில், கோடி-கர்ணங்களைத் தனித்தனியே கணிக்கும் வழி:—

கோடி-கர்ணங்கள் சேர்ந்த துகையால் புஜவர்க்கத்தை வகுத்த ஈவு துகை; இதை ரண்டிடத்தில் வை, ஒன்றை துகையில் சேர்த்துப் பாதிசெய்தது கர்ணமும், மற்றொன்றை துகையில் கழித்துப் பாதிசெய்தது கோடியுமாக வரும்:—

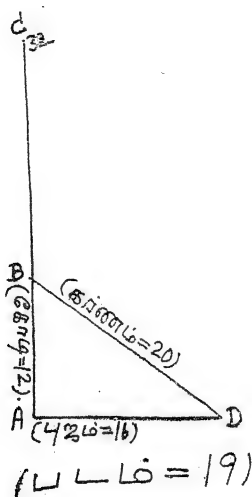
சமீகரணமிதற்கு:—

இங்கே:—

$$(\text{கோடி} + \text{கர்ணம்}) = A, (\text{புஜந் தேரியு})$$

$$\therefore \left\{ \frac{(\text{புஜ})^2}{A} = B \right\}; \left\{ \begin{array}{l} \text{கோடி} = \frac{1}{2}(A-B) \\ \text{கர்ணம்} = \frac{1}{2}(A+B) \end{array} \right\} \text{ என்றும்.}$$

இதற்கு உதாரணம்—



சமமான பூமியில் (32) அடியுயரமுள்ள மூங்கில் மரம் காற்றால் ஓடிந்து, தன்னடியிலிருந்து (16) அடிதூரத்தில் இதன் நுனி விழுந்தது. ஓடிந்த இடம் ஸம்பந்தித்தே இருக்கிறது. ஆகையால் இதன் நுனிக்கும் ஓடிந்த இடத்துக்கு முள்ள கர்ணரூபம் எவ்வளவு; ஓடிந்த இடத்திலிருந்து இது நிற்குமடியில் எவ்வளவு உயரம். என்பதைத் தனித்தனியே சொல்லென்றால்:—

இங்கு B சணிக்க:—; புஜ = 16

$$32 = (\text{கோடி} + \text{கர்ணம்}) = A$$

$$\therefore \frac{16^2 = 16 \times 16 = 256}{32} = 8 = B.$$

$$(\text{கர்ணம்}) = \frac{1}{2} (A+B) = \frac{1}{2} (32+8) = \frac{40}{2} = 20.$$

$$(\text{கோடி}) = \frac{1}{2} (A-B) = \frac{1}{2} (32-8) = \frac{24}{2} = 12$$

$$\therefore \text{கோடி} = 12, \text{கர்ணம்} = 20, \text{புஜ} = 16.$$

$$(\text{கோடி} + \text{கர்ணம்}) = 32 = (20+12);$$

$$(\text{கர்ணம்})^2 = \{ (20^2 = 400) \} = \{ 16^2 = 256 + (12^2 = 144) \}$$

என்றபடிக் கெல்லாம் சரியாகவே வரும்:—

வேறு:—

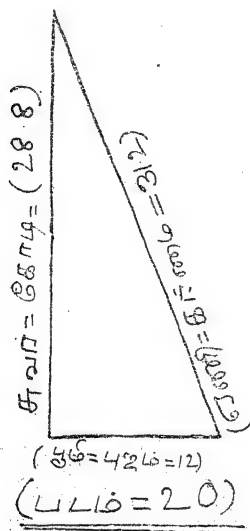
புஜகர்ண (ச்சேர்க்கையும்) யோகமும் கோடியுந்தெரிந்த இடத்தில், யோ (ஏ) கமாயுள்ள கர்ணபுஜங்களைத் தனித்தனியே நிச்சயிக்கும் வழி:—

தெரிந்த புஜகர்ணயோகத் துகையால் கோடி வர்க்கத்தை வகுத்த நவை ஷெ துணையில் சேர்த்துப் பாதிசெய்ய கர்ணமும், கழித்துப் பாதிப் பாதிசெய்ய புஜமும் வந்துவிடும் (இதுவும் முன் சொன்னயாதிரியேதான், ஆனால் ஸ்தான பேதம் மாத்திரமேயாகும்.)

இதன் சமீகரணம்:—

செக்கு கேஷத்தி விளக்கமிங்கு:—

படம் 20 ஐப்பார்:—



இங்கு (புஜம் + கோடி) = துகை.

$$C = \frac{(\text{கோடி})}{\text{துகை}} ; \left\{ \begin{array}{l} \text{புஜம்} = \frac{1}{2} (\text{துகை} - C) \\ \text{கர்ணம்} = \frac{1}{2} (\text{துகை} + C) \end{array} \right\}.$$

இதற்கு உதாரணம்:— வினாருபத்தி:—

மேற் பரணையில் ஓர் நெல் களஞ்சியம். இதில் நெல் முதலிய தானியங் கொட்ட ஓர் சுவற்றில் (28.8) அடி உயரத்தில் ஜன்னல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இச்சுவத்தினடியிலிருந்து ஏற; ஜன்னலில் சாத்தி இருக்கும் ஏணி அடிவழியாகக் கணக்கிட்டால் மொத்தத்துகை = (43.2) அடிகள் உள்ளன. ஆகையால் கர்ண உருவில் சாத்தியிருக்கும் ஏணியின் நீளமென்ன, சுவத்தடிக்கும். ஏணியடிக்கு முள்ள அந்தராள பூமியாகிய புஜஉருவ நீளமென்ன சொல்லென்றால்:—

$$\text{துகை} = (43.2) \text{ கோடி} = 28.8.$$

$$\therefore C = \frac{\text{கோடி} \times \text{கோடி}}{\text{துகை}} = \frac{829.44}{43.2} = \frac{(28.8)^2}{43.2} = 19.2.$$

$$(\text{கர்ணம்}) = \frac{1}{2} (43.2 + 19.2) = \frac{62.4}{2} = 31.2 = \text{ஏணி நீளம்}$$

$$(\text{புஜம்}) = \frac{1}{2} (43.2 - 19.2) = \frac{24}{2} = 12.0 = (\text{சுவர், ஏணியடி-நீள மிது}).$$

என்றாகும். மற்றவை முன்போலையவும்:—

$$\text{இங்கே} = (43.2) = (\text{ஏணி} + \text{பூமி});$$

$$\text{ஜன்னல் வரை சுவருயரம்} = (28.8) \therefore \text{புஜருபபூமி நீளம்} = 12' \text{ அடி.}$$

$$\text{கர்ணருப ஏணி நீள் உயரம்} = 31.2 \text{ அடி என்பதாயினாக.}$$

வேறு:-

கோடி கர்ணந்தரமும், (கோடி கர்ண வித்யாசமும்) புஜமும் தெரிந்த விடத்தில் கர்ணகோடிகளைத் தனித்தனியே கணிக்கவழி:-

வர்க்கித்த புஜத்தை, கோடி கர்ண வித்யாசத்துவையால் வகு. சுவை செ அந்தரத்தோடு சேர்த்துப் பாதி செய்ய கர்ணமும்; கழித்துப் பாதி செய்ய ஆக கோடியும் தெரியும்.:-

செக்குச் சமீ கரணம்:-

இங்குத்(துகை) = வகுக்கு மெண் = (கர்ணம் - கோடி)யும்; புஜமும்; தெரிந்தவைகளிரண்டு.:-

$$D = \frac{(\text{புஜம்} \times \text{புஜம்})}{\text{துகை}} = \frac{(\text{புஜம்})^2}{\text{துகை}};$$

$$(\text{கர்ணம்}) = \frac{1}{2} (D + \text{துகை})$$

$$(\text{கோடி}) = \frac{1}{2} (D - \text{துகை})$$

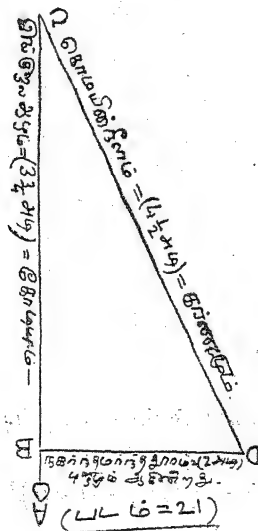
இதற்கு உதாஹரணம்:-

(படம் 21)ஐக் கவனி.

ஓர் குளத்தில் ஜலத்திற்கு மேல் ($\frac{1}{2}$) அறையடி உயரமாகத் தாமரைப்பூ ஒன்று தெரிந்துக் கொண்டிருக்கிறது. சக்ரவாகம், க்ரௌஞ்சம் முதலிய பறவைகளால் வெகுவாய்க் கலக்கப்பட்டு இதன் காற்றின் வேகத்தினால்,

அத்தாமரைப்பூ; இருந்த விடத்திலிருந்து (2) இரண்டடி தூரத்தில் போய் முழுகி விட்டது. ஆகையால் ஓ காணிக்கனே - நீ - தண்ணீராமுத்தையும், அப்பூவின் ஓவரிவறையிலும் கொடியின் நீளத்தையும் சொல்வாய்:-

குறிப்பு:- இங்கு தண்ணீர் ஆழமே கோடி. பூதுணி வறையில் ஏற்படும்; கொடி நீளமே கர்ணம். இக்கோடி கர்ணந்தரமே (கர்ண-கோடி) தான் ஜலத்துக்கு மேல் நின்ற தாமரை புஷ்பத்தின் உயரம் ($\frac{1}{2}$) அடியாகும்; இங்கிருந்து பூமுழுகிய தூரமான அடிகளிரண்டு (2) டே புஜமுமாகும்:



(செ AB) = (DC - CB) = கோடி கர்ணந்தரம் = $\frac{1}{2}$ அடி - (அகாவது ஜலத்துக்குமேல் தெரியும் பூவின் துனிக் குறிய உயரம் ஆகும்).

ஆகையால் கர்ணமும் கோடியுங்கணிக்கும் உதாஹரணம்:—

$$\text{இங்கு:— } D = (2^2 \div \frac{1}{2}) = 4 \times 2 = 8.$$

$$\text{கோடியின்} = \frac{1}{2} (8 - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ அடி}$$

$$\text{கர்ணத்தின்} = \frac{1}{2} (8 + \frac{1}{2}) = \frac{17}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4} \text{ அடி}$$

ஆகையால் ஜலத்தின் ஆழம் அடி = $3\frac{3}{4}$ ம் கோடி. பூ துனிவறை கொடி நீளம் = $(4\frac{1}{4}$ அடி) கர்ணமுமாம் உருவம் இதற்கு கோடிந்தரம்: படம் 21 ஐக்கவனி.

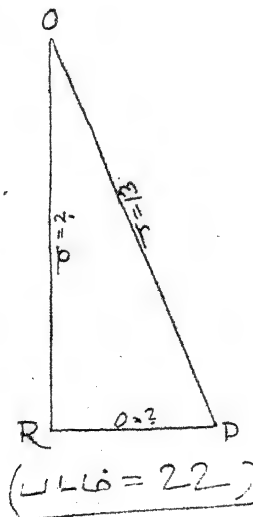
வேறு:—

கோடி புஜங்களின் வித்தியாஸமும், கர்ணமுந் தெயிரந்த விடத்தில் கோடி புஜபரிமாணத்தைக் கண்டு பிடிக்கும் வழியிங்கு:—

கர்ண வர்க்கத்தை எட்டித்தத்தில் கோடி புஜாந்தர வர்க்கத்தைக் கழித்த மிச்சத்தின் மூலத்தில் செ அந்தரத்தைக் கூட்டிடும், கழித்தும் பாதி செய்தவை களை புஜமும் கோடியும், தனித் தனியள வில்வரும்:—

இதன் சமீகரணம்:—

படம் 22ஐ நன்கு கவனி



இங்கே:—

$$A = \left\{ (\text{எட்டித்த கர்ணவர்க்கம்} - \text{கோடி புஜாந்தரவர்க்கம்}) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$A = \left\{ 2(\text{கர்ணவர்க்கம்}) - (\text{கோடி} - \text{புஜம்})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\left\{ 2 (\text{கர்ணவர்க}) - (\text{கோடிபுஜாந்தரவர்க}) \right\}} = A.$$

$$\text{கோடி} = \frac{1}{2} \left\{ (A) + (\text{கோடி} - \text{புஜம்}) \right\}.$$

$$\text{புஜம்} = \frac{1}{2} \left\{ (A) - (\text{கோடி} - \text{புஜம்}) \right\}.$$

இதன் உதாரணம்:—

$$\text{இங்கு தெரிந்தது (O P) = P = 13,$$

$$(\text{OR} - \text{RP}) = (p - O) = 7 = (\text{கோடி} - \text{புஜம்}).$$

$$(2 \times 13 \times 13) = 169 \times 2 = 338;$$

$$(p - O)^2 = 7^2 = 49$$

$$A^2 = (A \times A) \text{ ஷெ } (338 - 49) = 289$$

$$\therefore A = (289)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(289)} = 17.$$

$$(p - O) = M = 7 \text{ இங்கு}$$

$$\text{கோடிக்கு} = \frac{1}{2} (A + M) = \frac{(17 + 7)}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$(\text{புஜத்தின்}) = \frac{1}{2} (A - M) = \frac{(17 - 7)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

\therefore கோடி = p = 12. புஜ = O = 5. என்பதாயுணர்க.

(வேறு):—

இங்கு புஜகோடிச் சேர்க்கையும் [(புஜகோடி யோக)

= (புஜ + கோடி) மும்]; கர்ணமுந்தெரிந்த விடத்தில், தனித்தனியே புஜமும் கோடியும் கணிக்கும் வழி:—

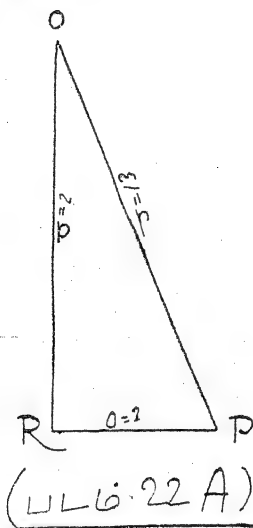
கர்ண வர்க்கத்தை ரட்டித்ததில் புஜகோடியோக வர்க்கத்தைக் கழித்து மூலித்ததை ஷெ யோகத்தில் கூட்டியும் கழித்தும் பாதி செய்ததே புஜ கோடிகளுக் குறியத் தனித்தனியான அளவுகளாகும்.—

$$\sqrt{\left\{ 2 (\text{கர்ணவர்க்கம்}) - (\text{புஜம்} + \text{கோடி})^2 \right\}} = A.$$

$$A = \left\{ 2 (\text{கர்ண} \times \text{கர்ண}) - (\text{புஜம்} + \text{கோடி})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{இங்கு (புஜம்} + \text{கோடி}) = B \therefore$$

(படம் 22 A ஐக் கவனி):—



$$\text{கோடி} = \frac{1}{2} (A + B),$$

$$\text{புஜம்} = \frac{1}{2} (A - B),$$

குறிப்பு :— இங்கு :—

$$17 = (OR + RP) = (p + o) = (\text{கோடி} + \text{புஜம்}). \quad \int \cdot PO$$

= கர்ணம் = 13 \therefore OR = p = ?, RP = o = ? என்பதற்கு உதாஹரணம் முதலியவைக் கவனிக்குக:—

உதாஹரணமிதற்கு :—

$$\text{இங்கு தெரிந்தகர்ணம்} = 13, (\text{கோடி} + \text{புஜம்}) = 17$$

$$\therefore (A) = \left\{ [2(13 \times 13) = (2 \times 169 = 338)] - [(17^2 = 289)] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (338 - 289)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7 = A.$$

$$B = (\text{கோடி} + \text{புஜம்}) = 17 \therefore$$

$$\text{கோடி} = \frac{1}{2} (A + B) = \frac{(17 + 7)}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

$$\text{புஜம்} = \frac{1}{2} (A - B) = \frac{(17 - 7)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

\therefore கோடி = 12, புஜம் = 5, கர்ணம் = 13. என்பதாகும்:—
(வேறு)

கோடியின் தெரியாத சிலபாகம் கர்ணத்தில் கூடியிருக்கச் சொச்சக் கோடியும் புஜமும் தெரிந்த இடத்தில், அந்த தெரியாத கோடியும்சம், ஸம்பூர்ணகோடி, கர்ணம் இவைகளின் அளவைக் கண்டு பிடிக்கும் வழியிங்கே காண்க:—

கோடியில் தெரிந்தபாகத்தை ரட்டித்ததோடு தெரிந்த புஜத்தைக் கூட்டிய தனால், புஜத்தைத் தெரிந்த கோடியின் பாகத்தால் பெருக்கியதை வகுத்த ஈய்வே தெரியாத (தாகிய) கோடியின் (நீளம்) உபரம் ஆகும். இதைக் கோடியிலும் புஜத்திலும் (சேர்த்ததே) கூட்டியதே(சரியான) கோடியும் கர்ணமுமாகும்:—

இதன் சமீகரணம்:—

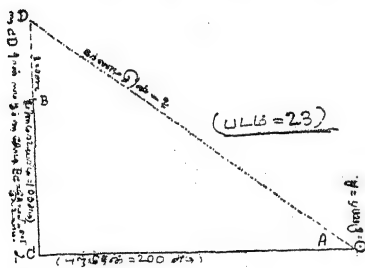
$$\left\{ \frac{(\text{புஜம்} \times \text{மிச்சமாய்த் தெரிந்த கோடியாகம்})}{(\text{புஜம்}) + 2(\text{தெரிந்தமிச்சக் கோடியாகம்})} \right\} = B D$$

ஸ்பூர்ணகோடி = (தெரிந்த மிச்சக்கோடிபாகம் + B D) ;
கர்ணம் = (B D + புஜம்). என் பதாகும்.

இதற்கு உதாஹாணமான வினா:—

ஓர் குரங்கானது (100) அடி உயரமுள்ள பனைமறந்திலிருந்து கொஞ்சம் உயரமாக நோராய்க்களம்பிக் கர்ண (குறுக்கு) வழியாகவே அம்மறத்திற்கு (200) அடி தூரத்திலுள்ள (வாபி) கிணற்றையடைந்து ஜலம் குடித்தது. என்றால்:—

அக்குறங்கு அம்மறத்துக்குமேல் உயரக்கிளம்பியதூரம் என்ன? கிணற்றை நோக்க ஆரம்பித்த இடத்தில் இருந்து (கர்ண வழியாய், ஏற்படும், கர்ண மானத்தின்) கிணற்றின் தூறமென்ன? வென்றால்:—



குறிப்பு.—கோடி = (CB+BD).

தெரிந்தகோடி தூரம். அல்லது உயம்=(CB.)

கர்ணம்=DA; A=கிணர்.

மற்றவைகளை விவரணத்தில்பார்:—

இங்கு தெரிய வேண்டியவைகள்.

BD = உயரக்கிளம்பிய நீளம்.

AD = கர்ணம்:—

CD = (CB+BD) = இதே சரியான கோடி.

புஜம் = 200 = CA;

(CB)=CDயில் தெரிந்ததாகிய கோடியின் சிலபாகம். ஆகும்.

ஆகையால் பொதுவான ஸமீகரணம்.

பொதுவாக:—

உயரக்கிளம்பிய தூரம் தான் = BD. (இதற்குச்)

$$= \left\{ \frac{(\text{மரக்கிணரந்தரபூமியானபுஜம்})(\text{தெரிந்தமிச்சக்கோடிபாகம்})}{(\text{மரக்கிணரந்தரபூமிபுஜம்}) + 2(\text{தெரிந்தமிச்சக்கோடிபாகம்})} \right\}$$

$$= B D = \frac{(AC)(BC)}{(AC)+2(BC)}; \text{ ஷ } BD = \text{உயரக்கிளம்பிய} = (உ. க);$$

$$\therefore \text{ஷெ} = (BD) = (\text{உ. கி}) = \left\{ \frac{(\text{பனைமரம்}) (\text{மரக்கிணர் தூரம்})}{2 (\text{பனைமரம்}) + (\text{மரக்கிணர் தூரம்})} \right\}.$$

$$\therefore BD = \text{உயரக்கிளம்பிய தூரம்} = \frac{(100 \times 200)}{2 \times 100 + (200)}$$

$$= \left\{ \frac{20000}{400} \right\} = \frac{200}{4} = 50 \text{ (அடி)} = BD;—$$

$$\text{கோடி} = (CB + BD) = CD.$$

$$\therefore \text{ஷெ கோடி} = (100 + 50) = 150.$$

$$\text{கர்ணம்} = AD = AC + BD.$$

$$= 250 = (200 + 50) \text{ என்பதாகும்.}$$

வேறு:—

உயரத்தில் வித்யாஸ் மான இரண்டு ம.ங்களின் நுனிகளிலிருந்து இவைகளின் எதிரடிக்குக் கர்ண கதிராக க்கயிறு (நூல்) கட்டினால் கர்ண வழியில் இவ்விரு நூலும் சேறு மிடத்திலிருந்து, பூமிக்கு நேர் செங்குத்தான ஆழம் (கீழிருந்து மேலானால் உயரம்) என்ன.

இந்த பூமியில் தானத்திலிருந்து இருமா அடிகளின் (பூகண்ட) தூரமென்ன வென்றால் இதற்கு வழி:— முதலில் சேஷத்ர தரிசனம் செய்ய வேண்டியது.

(பக்கத்திற் காட்டிய படம் 24ஐக் கவனி.)

இதில் தெரிந்த அவயவங்களாவன:—

உயர வித்யாமுள்ள இருமாங்களும், இதன் தூர (அந்தர) மும்:— ::

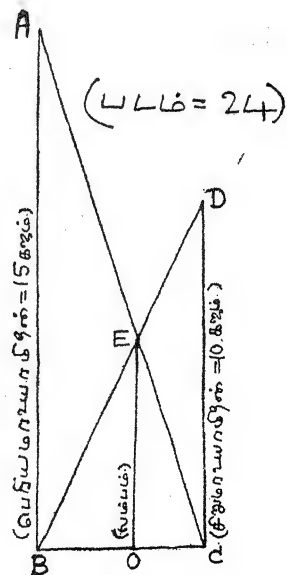
$$\text{பெரு மரஉயரம்} = (AB) 15. \text{ ம.}—$$

$$\text{சிறு மரஉயரம்} = (CD) 10. \text{ ம.}—$$

$$\text{இவ்விரண்டின் தூரம்} = (BC) = 5. \text{ ம.}—$$

ஆகத் தெரிந்த இம் (3) மூன்றிலிருந்து:—ஒன்றுக் கொன்றின் நுனிக்கு மடிக்குங் கட்டிய இரு கயிறுகளின் (ஸம் பாதத்தில்) சேர்க்கையில் (E)ல் இருந்து பூமியில் (O)ன் ஆழ மென்ன அகாவது $OE = ?$, $BO = ?$, $CO = ?$, இதாமான $AC = ?$, $BD = ?$, $BE = ?$, $EC = ?$, என்றால் இதைக் கணிக்கும். விவரம்:—

இதன் சிலஉருவுக்குப் பொது வழி:—



பெருமரத்தை சிறுமரத்தால் பெருக்கியதை ஷெ பெரு சிறுமரச் சேர்க்கையால் வகுத்த ஈவு (EO) என்கிற லம்பமாகும். (ஷெ பெரு சிறு மரச்சேர்க்கையையே வகுக்கு மெண்ணுகிரஹரமாகக் கொள்ள வேண்டிய திங்கு).

மாத்நூத்தை (B C)ஐ, பெரிய மாத்நூல்பெருக்கி ஹாத்தால் வகுக்க
பெருபுகண்டம் (O B) தெரியும். மாத்நூத்தை சிறுமாத்நூல் பெருக்கி ஹாத்தால்
வகுத்த ஈவு சிறுபுகண்டம் (O C) தெரியும்.

(மற்ற ஸாதனங்களை ஸமீ காண உதாஹரணங்களில் காண்க):—

ஸமீகரணங்களும், உதாஹரணங்களும்:—

$$(1). (EO) = \frac{(AB) \times (CD)}{(AB) + (CD)} = \frac{15 \times 10}{15 + 10} = \frac{150}{25} = 6 = (\text{இலம்பம்})$$

$$(2). (BO) = \frac{(BC) \times (AB)}{(AB) + (CD)} = \frac{5 \times 15}{15 + 10} = \frac{75}{25} = 3 = (\text{பெருபுகண்டம்})$$

$$(3). (OC) = \frac{(BC) \times (CD)}{(AB) + (CD)} = \frac{5 \times 10}{10 + 15} = \frac{50}{25} = 2 = (\text{சிறுபுகண்டம்})$$

$$(4). (AC) = \left\{ (AB)^2 + (BC)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (15^2 + 5^2)^{\frac{1}{2}} = (225 + 25)^{\frac{1}{2}} \\ = (250)^{\frac{1}{2}} = \left(15 \frac{8114}{10000} \right) = 15.8114.$$

$$(5). (BD) = \left\{ (CD)^2 + (BC)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (10^2 + 5^2)^{\frac{1}{2}} = (100 + 25)^{\frac{1}{2}} \\ = (125)^{\frac{1}{2}} = (11.18) = 11 \frac{18}{100}.$$

$$(6). EC = (OE^2 + OC^2)^{\frac{1}{2}} = (6^2 + 2^2)^{\frac{1}{2}} = (36 + 4)^{\frac{1}{2}} = (40)^{\frac{1}{2}} \\ = 6.325.$$

$$(7). BE = (OE^2 + OB^2)^{\frac{1}{2}} = (6^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (36 + 9)^{\frac{1}{2}} = (45)^{\frac{1}{2}} \\ = 6.708$$

சுலபமாகவே (கர்ணங்கள்) ஸாதனஞ்செய்ய குணகங்களின் ஸாதனம்:—

$$\left(\frac{AC}{AB} = \frac{15.8114}{15} = 1.0541; \frac{AC}{AB} = \frac{15.8114}{5} = 3.1623; \right.$$

$$\left. \frac{11.18}{5} = 2.236. \right), \text{ கடினமானவர்க் மூல கணிதமில்லாமலே; மேற்கண்ட}$$

ஸஜாதி (ஒரேஜாதி) யான- $\angle OBE = \angle CBD$; $\angle BCA = \angle OCE$
ஆகிய த்ரிகோண சேஷத்ரங்களிலடங்கிய (CA, CE), (BE, BD) ஆகிய கர்ண
ரேகைகளைக்கணிக்க:—

உதாரணமிங்கு:—

$$(CA) = \frac{(CE) \times (CB)}{(OC)} = \frac{(CE) \times (BA)}{(OE)}$$

$$= \left(\frac{6.325 \times 5}{2} = \frac{15.8125}{2} \right) = \frac{15}{6} \times 6.325.$$

$$= 15.8125.$$

$$\text{ஷே} = \left(\frac{5}{2} \times 6.325 \right) = 15.8125.$$

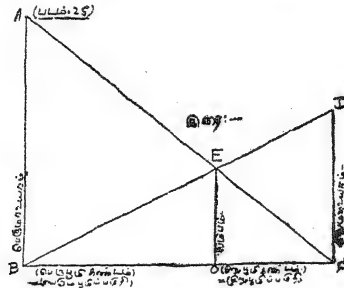
இவ்விதமே :—

$$(BD) = \frac{(BE) \times (CD)}{(OE)} = \frac{(BE) \times (BC)}{(BO)}$$

$$= \left(\frac{10}{6} \times 6.708 \right) = \left(\frac{5}{3} \times 6.708 \right) = 11.18 \text{ என்றாகும்.}$$

முன்வர்க மூலகணிதத்தாலும் ஷே CA = $(250)^{\frac{1}{2}} = 15.8114$;

BD = $(125)^{\frac{1}{2}} = 11.18$ என்று வந்ததைக் கவனி. அவ்வளவு கடினத்தை; சிறிய மூலத்தால் பெரியதைச் சுலபமாகக் கணித்து முடிக்கலாகும் :—



இந்தப் படத்தின் (25ம் படத்தின்) கண்ணுள்ளவைகள் படம் 26, 27ல் (இதன் கீழ்) கண்ட சேதரப் படிக்கு, இரண்டு த்ரிபுஜ த்ரிகோண சேதரங்கள் சேர்ந்திருப்பதாகும்.

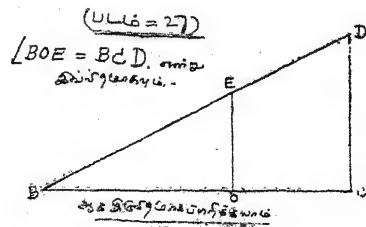
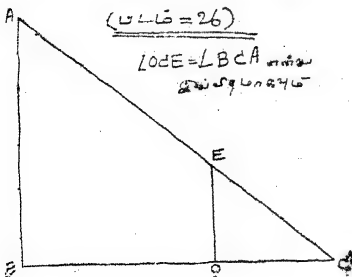
(விவரணம், படம் 26, 27ஐக் கவனிக்கவும்)

இந்த சேதரத்தைப் பற்றி இன்னும் கவனிக்க வேண்டிய விஷயங்கள் :—

மேலே (படம் 25ல்) காட்டிய சேதரத்தை ஸமஜாதித்ரி கோணங்களுடங்கிய இரண்டு சேதரங்களாகப் பிரிக்கலாம் :—

எவ்வித மென்றால் :—

சேதர உருவமாகவே இவைகளைக் காண்பிக்கப்படுகிறது :—

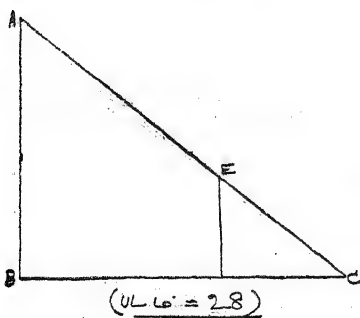


குறிப்பு:—

$$\angle OCE = \angle BCA, \text{ என்றும்}$$

$$\angle BOE = \angle BCD, \text{ என்றும்}$$

இருவிதமாக வேறுபடுத்தக் குறிப்பில் காண் பித்தபடிக்கு ஒன்றுக் கொன்று எந்த விதத்திலும் (முக்கோணங்களும்) முன்றுவித கோணங்கள் ஸாய்மமும், புஜங்கட்கு குறிய நியம ரேசைகள் வித்யாஸமாவதோடு ஒன்றுக்குள்ளொன்று அடங்கியிருப்பதாலும் (வர்க்க மூலகணிதக் சடினமில்லாமல்) திறை ரூசிகத்தால் உதாரணத்தில் கண்டவாறு சலபவாகவே கணித்து விடலாம். இவ்வித சேஷத்ர ஸைமத்வத்தைக் கொண்டே நம் பூர்விகர்கள் (3438) 'கலைகளைக் கொண்ட த்ரிஜ்யா என்கிற (வியாஸார்த்தமாகிய); (21600) கலைகள் கொண்ட வட்ட அறைவிட்ட மாகிய; கர்ணத்தைக் கொண்டு (வேற்றுமையையே எப்போது மனடாபாததாகப் பாவிக் குங் கர்ணத்தைக் கொண்டு) 0° முதல் 90° வரையில் ஏற்படும் ஒவ்வொரு பாகாதி காலாதிகளுக்கும், கோடி புஜங்களாக அடையும் புஜஜ்யா, கோடிஜ்யாக்களை நிச்சயித்து இவைக ட்குறியபடி ஸம்பந்தித்துப், பெரிய த்ரிகோணமாக மேலே காட்டியபடி (கடையும) பெரிய த்ரிகோணத்துக்குறிய கர்ணத்தை ஸ்பர்ச கர்ணமாகவும், புஜமாவதை ஸ்பர்சரேசையாகவும், மற்றோர் புஜத்தை ஸதாகாலமும் வித்யாஸமடையாத த்ரிஜ்யா ஆகிய அறை விட்டமாகவும் கணித்து இவைகளை கிரக கணித உபயோக உபகரணமாகவும், இதரமான த்ரிகோணமிதி முதலிய வியவகாரம் முதலியுவுக்குறிய உபகரணங்களாகவுங் கொள்ளுகிறார்கள். இவ்வுபகரணங்களைக் கொண்டே (அடையக்கூடாத) எவ்விதத்திலும் போக முடியாத இடங்களின் தூரம் முதலியவைகளையும்ளக்க இயலும் என்பது வெகு விளக்கமே.



இந்த ($\angle ABC = \angle EOC$) என்றதாகிய இந்த பக்கத்தில் காட்டிய சேஷத்ரத்தை (82)ம் பக்கத்தில் காட்டிய (படம் 17-18 ஆக அமைந்த) சேஷத்ரப்படிக்கும் அமைக்கலாம்.

மற்றுமிந்த சேஷத்ரத்துறிய விசேஷ விளக்கம் யாது; எவ்விதம் மாறுபாடாக ஒரே சமத்வத்திலமையுமென்றால்:—

(படம் 29 ஐயும் கூடவே கவனி)

$\angle COE = \angle COE$, இவ்வொன்றும் மாறுபாடில்லை.

மற்றைய:—

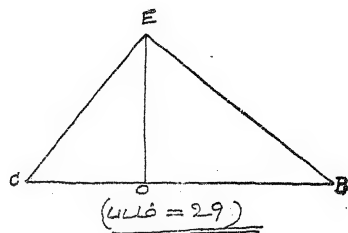
OB, BA, AE, என்கிற புஜரேசைகளை மாறுபாடுடையது.

எவ்விதத்தில் என்றால்:— (OB) ச்குச் சரியாக இதில் (EB); ஆகவும், (CB) ச்குச் சமம் (AB) அல்லது (AE) ஆகவுமமைகின்றது. நன்கு கவனிக்க, இன்னும் நிரூபிக்கப்பட்டபடி:—

{ (படம் 23ல் உள்ள) } { (படம் 29ல் உள்ள) }
 { கோணங்களுக்கு) } { கோணங்கள் சமம்) }

(கீழ்க்கண்டமாதிரியில்)

$$\begin{array}{rcl} EC & = & EC. \\ EO & = & EO. \\ OC & = & OC. \\ OB & = & EB. \\ (AB=AE) & = & CB. \end{array}$$



என்றபடிக்கமைவதைப்பரீட்சித்தும்பார். மேலுமிதிலமைந்த கோணம்:—

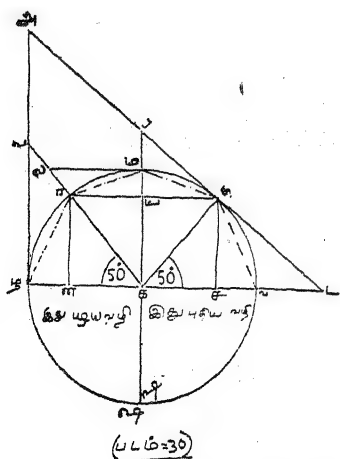
$$\angle (COE, \angle BOE) = 90^\circ$$

$$\angle CEB \text{யும் } 90^\circ$$

[என்பதைபுங்கவனித்தலவசியமாம்]

(இவ்விதமமைந்த கோணத்தை முக்கிய-ஆகாரமாகக் கொண்டே நவீன முறையில் த்ரிகோண மிதி கணிதத்தை மேலே கூறியபடிக்கெல்லாம் நடத்தி வருகிறார்கள். இவர்கள் மேலே கூறியவட்ட அறைவிட்டத்தை (3438) க்குப் பதிலாக (1) ஒன்று என்றுகொண்டு இதற்கே புதுகோடிகள் நித்சயித்து ஸ்பர்ச கோகை (டான்ஞன்ட்) ஸ்பர்சகர்ணம் (ஸ்க்கன்ட்) முதலிய நிறுமித்து, இதிலிருந்து; கிரகதி முதலிய த்ரிகோணமிதி கணிதங்களையும் வழங்கிவருகின்றனர்.)

அவ்வுருவங்களில் மாறுபாடாகவமையுமிதையும் நன்குதவனிகத்தெரிய வருமென்பது:—



விசேஷக்குறிப்பு:—

இவ்விதமமைந்த (இருவழிப்படிக்கு மமைந்த) கோணங்களினுடைய ஸாம்யத்தினால் வெகு ஆச்சரிய யுக்திக்கமையும் பற்பலவிதங்களான கணித ஸாம்ய முறைகளுமேற்படுகின்றன. அவைகளை விவரிக்கப் புகிலிங்கேபெருகும். ஆகவே:—

சில ஸாம்யங்களைமாத்ந்தரம் பொதுவழியில் கவனிக்கவும். அதிலுஞ் சிற்சில உபகரண விவரணங்களை விளக்கம் செய்யப்பட்டிருக்கின்றது:—

அவ்விரு உருவங்களையும் [படம் (28, 29) போன்ற உருக்களையும்] ஒரே வட்டத்தில் நன்குணுமாறு விளக்கப்படுகின்றது. அவைகளை

வெகு நிதானமாகக் கவனிக்க வேண்டியதே அதிக அவசியம் ஆகும்:—

இவைகளின் ஒன்றுக்கொன்றின் வித்தியாசமில்லாத ஸம்பந்தங்கள் எவை எவைகளென்றால்:—

அவைகளாவன:—

மேலே (படம் 30ஐ நன்கு கவனி) காட்டப்பட்டிருக்கும் (வஷழம்) என்கிறவட்டத்திற்கு (கத) என்கிற அறைவிட்டம் (கவ) விலிருந்து (சத) உயரம் கிளம்பினால் (க) என்கிற வட்ட மத்யகேந்திரத்தில் (50°) ஐம்பது பாகைக் கோணம் உண்டாகிறது, இதையே (வத) என்கிற வில்லாகிற வளைவுக் கோட்டினிடம் கணக்கிட (50°)யாக கொண்ட சாபாம்சம் என்று சொல்லுவார்கள். இந்த (வத) சாபாம்சத்துக்கு (முர) சாபாம்சம் இந்த இடத்தில் சரியே.

இனி சொல்பவையாவும் ஸ்ரீலரேகையை (கோட்டை) அனுசரித்தவைகளே:—

[(கோணம் (அல்லது சாபம்) = 50°) ஐம்பதுபாகைக்கு இங்கே]:—

1. (கத = கர) கர்ண (அறைவிட்ட). மானால் இதற்கு
2. (சத = ரன = கய) புஜம், (யத = யர) = (கச = கன) கோடி.
3. (சவ = னமு) = உஜ்யா, (யம) = கோடி உஜ்யா;
4. (வத = ரமு) = ஜ்யோஜ்யாகர்ணம் = (கார்டு).
5. (தம = ரம) = கோடிஜ்யோஜ்யாகர்ணம் = (குகார்டு).
6. (டத = முவ) = புஜஸ்பர்சரேகை,
7. (தப = மல) = கோடிஸ்பர்சரேகை
8. (கட = கவ) = புஜஸ்பர்சகர்ணம்
9. (கப = கல) = கோடிஸ்பர்சகர்ணம்

இங்கே விசேஷம்: யாதெனில்:—

(க) என்ற கேந்திரத்தில் எற்பட்ட கோணமாகிய (50°)பாகையும், (ப)

அல்லது (அ) ஸ்தானத்திலும், இவ் (50) வன்பதின் கோடி கோணமாகிய நற்பது (90°—50°) = (40°) பாகையும், (ட) (வ) ஸ்தானங்களிலும், இருப்பதைக் காணலாம்.

படத்தில் காண்பித்தபடிக்கே இருசார்பார் க்ஷேத்ரங்கனையுங்கொண்டால் தான் (அ) என்கிற ஸ்தானமேற்படுகிறது. அப்போதும் (மு) ஸ்தானத்தில் நேர்க்கோண முக்கோணத்துக்குரிய கர்ண ஸம்முக கோணம் தொண்ணூறு (90) பாகையே ஆகும். ஏதாவதோர் மதத்தைக் கொண்டால் (டப) என்கிற கர்ணத்தோடும், அல்லது (கவ) என்கிற கர்ணத்தோடுந்தான் நின்று விடும்.

இவ்விடத்தில் டங்கியது டு (டபு) பெரியதற்கோண தரிபுஜங்கள். டு (டகப) (மபதரி கோண தரிபுஜங்கள். டு (டசத) சிறியதற்கோண தரிபுஜம்: மற்றும் டு (டவத); டு (கமப); டு (மரல); டு (வரழ) இவைகள் யாவும் விஷமதரிபுஜ தரி கோணங்கள் என்று கருதுக.

இவைகளில்:—

$\angle(\text{டீத}) = \angle(\text{டகப}) = \angle(\text{டழஅ})$ என்பவைகள் பாஸ்பரம் ஸாம்யமுடையவைகள். $\angle(\text{ஊர}) = \angle(\text{கழவ})$ இவைகளும், $\angle(\text{சுயர}) = \angle(\text{கமல})$ இவைகளும், ஒன்றிலொன்று ஸாம்யமே:—

நவீனமுறையிலுள்ள ஸ்பர்சு (டத) ரேகையும் கோஸ்பாசு (தப) ரேகையும்
சேர்ந்திருப்பதால்தே கர்ணம், இதற்கு (கட) புஜஸ்பர்சு கர்ணம் புஜம், (கப)
கோடிஸ்பர்சு கர்ணம் கோடி என்பதாம்.

இருமதத்தைதயுந் தழுவியபடிக்காகில்:-

$$\text{காண்பு} = \left(\frac{\text{பு}}{\text{க}} \right) = \left\{ \frac{(\text{தக}) (\text{பு})}{(\text{க})} \right\} = \left\{ \frac{\text{பக} \times \text{பு}}{\text{க}} \right\}$$

$$\text{கோடி} = (சுஅ) = \left\{ \frac{\text{சுத} \times \text{முட}}{\text{சுட}} \right\} = \left\{ \frac{\text{பக} \times \text{முட}}{\text{சுட}} \right\}$$

புஜம் = (முட) = (புஜஸ்பர்ச கர்ணம் + த்ரிஜயா). = [(கட) + (முக)]

இதனுட்புகுந்தால் வெகு வெகு வினோதங்களுள்ள க்ஷேத்ரமானங்களேற்படும். விரிவுக்கஞ்சி இதோடு விடுத்தனம், ஆனாலும் ஓர் விசேஷமிங்கு அவசியங்காணவேண்டியது:—

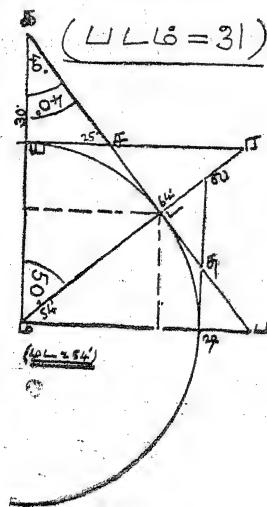
அதாவது

இருமதங்களிலுமேற்பட்ட ரோகங்களில் சிலவைகளை ஒரேபக்கத்தில் (ஒர்புறத்திலேயே) அடக்குவோமேயானால்,—

[படம் = 31 ஐப் போல் க்ஷேத்ரம் சிழுகண்டபடிக்கமைபும்:—

நம்முடைய முக்கியப் பாயத்தனத்தினால் தெரிந்த:—

படம் 31ஐ நன்றாகக் கவனிக்கുക:—]



[இதைப்பற்றிய மற்றபஸகல விவரணகளும் பெதுவழியில் காணத்தக்கவை மற்றும் இதைச் சம்பதித்தஜ்யாதி (ஸைன்முதலிய) மூலஉபகரணி அவயங்களை முன்கேட்தரத்திலேயே நன்கு விவரணஞ்செய்யப்பட்டதாகும்.]

(கய) ரேகையையும் (க) ஸ்தானகோணத்தையும், அல்லது (ஷப)ரேகையையும் (ப) ஸ்தான கோணத்தையுங்கொண்டு தெரியாத தாகிய அறைவிட்டமான (மட) [= (மஷ) = (மய)] வைக்கணிக்கவேண்டிய விதிதம்:—

நன்றாகப்பூமிதிஸாதனத்தில் கூறப்படுகின்றது.

அஃதுஎவ்வாறெனில்:—

பூமியின் மேற்பறப்பிலுள்ள ஓர்மலையின்உச்சியில் ஏறி நின்றபோது நம் கண்ணின் ஸ்தானத்தை (க) என்கிற ஸ்தானமாகக் கொண்டால் (யக) என்பது பூமிமேலிருந்து நம்கண் வரையிலுள்ள உயரம். இது சுலபத்தில் தெரிந்துக்கொள்ளக்கூடியதே (க) விவிரக்கும் கண்ணால் சமீபத்தில் இருக்கும் (கடல்மறையுந் தூரத்தை) அகாவது (கடலும் வானமும் தொடுத்தூரத்தை) நோக்கிக் கோணமானியால் (வெகுசூக்குமமாகிய கோணமானியாக இருத்தல் வேண்டும்) அளக்க (அக்கர்ணரேகைபைத்தொடும், கீழி நுந்து மேல்நோக்கும் கோணம்) ஏறு கோணம் ஏற்படும்: (இதை பாசை கலை விகாலை பர்யந்தமும் வெகுசூக்குமமாக அளக்கவேண்டியதாகும்: இல்லையேல் பிசுமும் ஸ்தாலத்துக்குத் தக்கபடி பிறகு த்ரிகோணமிதி விகிதப்பதக்கப்படிக்கு அவ்வித மேற்பட்ட ஏறு கோணத்துக்கு ஸ்பர்சகர்ணமும் (ஸீக்கன்டம்), ஸ்பர்சரேகையும் (டான்ஞ்ஜன்டம்) தெரிந்து இவற்றை (யக) உயரத்தால் பெருக்கக் கர்ணமும் கோடியும் (யக) என்கிற புஜத்தினளவுக்கேற்படும். ஆகையாலிங்கு (க) என்கிற கோணத்திற்கு (யக) புஜம், (யச) கோடி, (கச) கர்ணம், என்பதை முதலில் தெரிந்து கொண்ட பிறகு:—(கச) என்கிற கர்ணத்தோடு (யச) என்கிற கோடியைக் கூட்டினால் இது (கசடதப) என்கிற நேர்க்கோட்டில் (கட) என்கிறவறையிலுள்ள (கர்ண) ரேகை யைக் காட்டுகிறது. இந்த (ட) வில்தான் (90) தொண்ணூறு பாகையில் சந்திக்கும் (மட) என்கிற மற்றோர் புஜமிருக்கிறது. இதுதான் தெரியவேண்டிய (மட) வாகிய பூமியின் அரைவிட்டம்.

பிறகு (க) கோணஸ்பர்சரேகையால் (கட) வைப் பெருக்கியதே (மட) வாகும். (கட)வை (க) கோண ஸ்பர்சகர்ணத்தால் பெருக்க (அல்லது-க-கோண கோடிஜ்யாவால் வகுக்க ஈவு), (மக) என்கிற கர்ணமும் வரும். ஆகவே (கடம) என்பது ஓர் ஸமத்ரிகோணமாயமைந்தது.

இதற்கும் உதாரணம்:— காண்க.

மேலே காட்டியபடத்தின் (௦யஷவ)வை ஓர் வட்டமாகவும் வட்டத்துக்கு மேல் நின்றவனின்கண் உயரம் - (யக) = 30. ஆகவும், இங்கிருந்து கடல் கோடியாகிய ஆகயந்தொடுமிடத்தை நோக்குங் கோணம் (க°=40°) நர்ப்பது பாகையாகவுங்கொண்டு - வட்ட அறைவிட்டமாகிய - (மட)வைக் கணிக்க வேண்டுமென்றால்:—

இதற்கு வேண்டிய உபகாரணங்கள்:—

மேதமாதிகல் டேபிளைப்பார்க்க:—

(க⁰) ஸ்தானகோணம் 40°க்கு காஸ் = 0.766; டான்ஜன்ட் = 0.839.
ஸீகன்ட் = $(\frac{1000}{0.766}) = 1.3055$; (யக) = 30. ம் ஆனால்:—

$$(கச) = [(யக) (க^0 ஸீக்கன்ட்)] = (30 \times 1.3055) = 39.2;$$

$$(யச) = [(யக) (க^0 டான்ஜன்ட்)] = (30 \times .8391) = 25.2;$$

$$(\text{டச}) = (\text{யச})$$

$$\therefore (\text{கட}) = (க^0 ச + யச) = (39.2 + 25.2) = 64.4.$$

$$\therefore (\text{கட}) = 64.4.$$

(மட) = (கட) (க. டான்ஜன்ட்) = $(64.4 \times .8391) = 53.9$ இங்கு தெரிய வேண்டியது அரைவிட்டமாகிய (மட) தானாகையால் (மட) = 53.9 இவ்விதமே பூமியின் குறுக்களவியயாதியும் கணிக்க:—

(யக)வை, உயரமலைமேல் நிற்கும் மனிதன்கண் உயரம், (ட)வை க்ஷிதிஜம் (என்கிய ஹாரைஸான்) ஆகவும் (டக), (யக) ரேகைசேரும் (க) கோணத்தையும் கணித்துக்கொண்டு மேற்கூட்டிய உதாரணப்படி கிரிகை செய்தால்:—

$$\text{பூமியின் அறைவிட்டம்} = \left(\frac{7927}{2} \right) \text{மைல்கள் என்பதும் வந்துகிடும்.}$$

விசேஷம்:— வேதகணித விகிதப்படிச் சுத்தமரய்க் கணிக்கப்பட்ட பூமியின் வெகுபெரிய அறை விட்டங்நளாயமைந்த (உலகவ்யவகாரதிசைசுடக் குறிய):—

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{தென்வடல் நீளம் மைல்கள்} = 3963.296 \\ \text{கிழக்கு மேற்கு நீளம் மைல்கள்} = 3949.791 \end{array} \right\} \text{இவைகள் இப்படிக்காம்}$$

இன்னும் விவரிக்க விஷயம் விரியுமென்பதால் இதை இதோடு நிறுத்தப் பட்டது.—

(வேறு):—

இனி இஷ்டப்படிக்கெல்லா மேற்படும் நிலத்தின் விசாலம் (குழி) கணிக்க விவரம்:—

அகலத்தை நீளத்தால் பெருக்கினால் நாற்சதுர நிலப்பரப்பு (கிலக்குழி) தெரியும், (1)

நீளத்தை அகலத்தால் பெருக்கிப் பாதிசெய்ததே முக்கோண உருக் கொண்ட நிலத்தின் குழியாம். (2)

நாலுக்கும் மேற்பட்ட சதுரங்கள் கொண்டதானாலும், இவைகளுக்குள்ளே அடங்கியிருக்கும் முக்கோணங்களைக்கொண்டு மேற்கூறியவாறு கணித்து எல்லாம் சேர்க்க அந்நிலக்குழியுமேற்படும்:—

இதற்குச் சில உதாரணம்:—

இதிலுள்ளதோடும்

இது நீளம்:

1	2	3	4
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

இது அகலம்

$\therefore (4 \times 4) = 16$ நீளம்
அகலம் 4

(படம் = 32)

இதில் அகலம் நீளம் ரண்டும் 4 ஆவதால் $(4 \times 4) = (4)^2 = 16$ \therefore இந்த நிலக்குழி = 16 ஆம்.

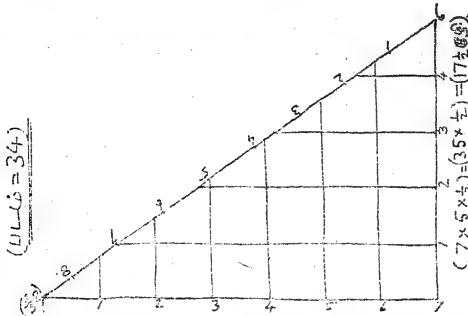
இதிலுள்ளதோடும்

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18

6×3 நீளம் $(6 \times 3) = 18$ அகலம்

(படம் = 33)

இதில் நீளம் = 6, அகலம் = 3;
 $\therefore 6 \times 3 = 18$ இதற்கு இந்த 18 தான்குழியாகும்:—

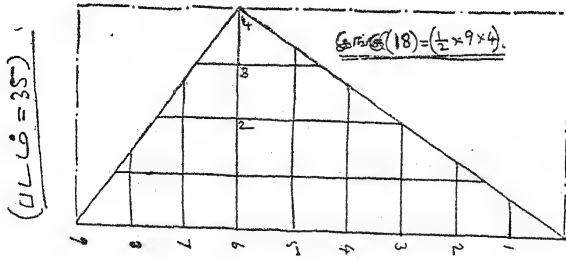


இந்த (படம்-34-ஆகிய) ஷேட்கூற்றை நன்குந்று நோக்குவதால் எவ்விதத் திலும் 7ரூம். 5ரூம். $(\frac{1}{2} =$ அரை), ஆவதால் இதற்குரிய விசாலக்குழியும் $= (7 \times 5 \times \frac{1}{2}) = 17\frac{1}{2}$. (பொதுவிதியில் மற்றவை)

(படம் 35)

இது நேர் முக்கோணம்; அகலம் அல்லது உயரம் = 5, நீளம் = 7

$$\therefore \text{இதன் குழியின்} = \frac{\text{உயரம்} \times \text{நீளம்}}{2} \therefore = \frac{5 \times 7}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2} \text{ குழி}$$



சந்தர்ப்பத்தைப்போல் இங்கு கண்ட அகலத்தை உயரமென்றுங்கொண்டு
செய் ஸூத்ரத்தை உபயோகிக்குக. இங்கு இதுதான் விசேஷம்.

படம் 34ஐப்போலவே இதுவும் ஸகலரேகை விகிதத்திலும் ஸாம்யத்தை
யடைவதால் இதற்கும் விசாலக்குழி ஸாதனத்திற்கு அதேவழியே ஆகும்.
(இவ்விகிதமே படம் 36க்குமாகும்)

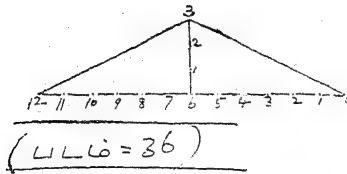
\therefore நீண்ட சதுரவிசாலக்குழி று

$$= (\text{நீளம்} \times \text{அகலம்} \times \frac{1}{2}) \text{ இங்கு } = (9 \times 4 \times \frac{1}{2}) = 18. \text{ ஆகும்:—}$$

இதற்கும் உயரம்=4, நீளம் = 9

$$\therefore \frac{4 \times 9}{2} = 2 \times 9 = 18. \text{ குழியாகும்.}$$

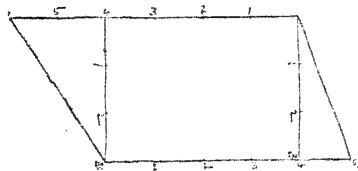
(படம் 36)



$$\text{இதற்கு உயரம்}=3, \text{ நீளம்}=12 \therefore \text{இதன் குழியின்} = \frac{12 \times 3}{2} = 6 \times 3 = 18.$$

(படம் 37. ஐக்கவனி)

(படம்=37)



முன் சொல்லிய கேட்காங்களை மனிதில் வைத்து இதைபுங்கவனிக்க ஷே
கேட்காசாதக வழி நன்குபுலப்படும், மற்றவிவரம் பொதுவழியில் கவனிக்குக:—

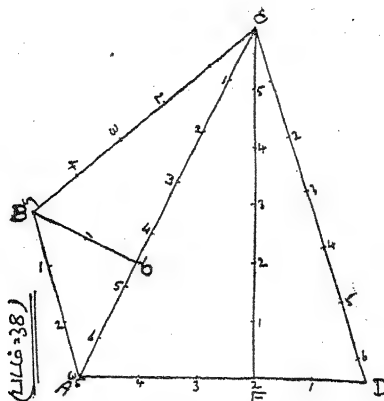
இதைப்போல் இன்னும் பலவித வித்யாசங்களிலும் கேட்காங்கள் நிர்மாளிக்கப்
படும். எதற்குமிதேவழி:—

இவ்விதம் கேட்காமமைந்தால் $\square DD_1; BB_1$; என்று முதலில் கேட்காததைப்
பிறித்து நாத்சதுயாக்கிக்கொண்டு இதன் குழியோடு. மற்றய (BB_1C) ,
 (DD_1A) என்கிற இருதிரிபுஜ கேட்காக்குழிபைக் கூட்டினால் $\square ABCD$
என்ற விஷமசதுர்புஜக் குழியும் வந்துவிடும்:

$$(\text{ஷே} ADCB \text{ குழி}) = [(D_1 B) (B_1 D) + \frac{(B_1 C) (BB_1)}{2} + \frac{(AD_1) (DD_1)}{2}]$$

என்பதாம்.

(படம் 38ஐப்பார்)



இவ்விதம் $(ABCD A)$ என்ற விஷம சதுர்புஜமானாலும் இதில் $\triangle ACD$
ஒரு முக்கோணம் $\triangle ACB$ மற்றோர் முக்கோணம்:—

ஆகையால் CE, OB , என்றலம்பனைக்கொண்டு முன்சொன்னபடி செய்து
இருவிசாலக்குழிகளையுங் கூட்டினால் ஷே $(ABCD)$ என்ற கேட்கா (விசாலம்)
குழி வந்துவிடுமென்பது உணர்க.

இவ்விதம் முதலில் தெரிந்துகொண்டு பின்பு யுக்தியால் எந்தவிதம்
எத்தனைவித புஜங்களடங்கிய வெகு புஜ கேட்காங்கடக்கும் விசால மென்கிற
குழியைவைக்கணிக்கலாம்:—

குறிப்பு:— வெகு புஜ கேட்காமாகில் இவ்விதம் $(ABCEAO)$ போல்
கேட்கா ரேகைகள் நிச்சயித்து இதற்குரிய முன் வழிகளின்படி விசாலக்குழி
ஸாதநம் செய்க-மற்ற விவரம் பொதுவிதிப்படிக்காம்.

$(ABCD A)$ க்குரிய குழிகளின் (ஸமம்)

$$(\text{=}) \frac{1}{2} EC \times ED. + \frac{1}{2} EC \times AE. + \frac{1}{2} AC \times OB. \text{ என்றாகும்}$$

மற்றுவருவனவெல்லாமிப்படிப்பார்க்கு:—

இனிமேலிதைப்பற்றி விளக்கம் செய்யவேண்டிய அவசியமில்லை:—

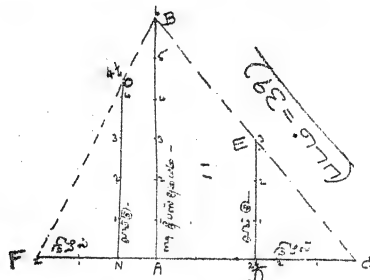
முதலில்:— வினவும் கேஷீதரம் ஏற்படுமா - என்பதையும் கவனித்துக் கிரிகை நடத்தவேண்டும்:

(வேறு)

இனி நிழல், நிழலைக்கொடுக்கும் ஸ்தம்பம் முதலிய (கருவி) இவைகளின் சம்பந்தமான வினாக்களிந்து:—

(படம் 39)

இவ்வித (சாயை) நிழலுள்ள கேஷீதரங்கள் வெகுவாய் திரிபுஜ ரூபமுள்ளவைகள் அங்கு சொன்ன கிரிகைகளை யுக்திப்படி இங்கும் செய்ய, நிழல், சங்கு, ஸ்தம்பம், சங்கு தீபாந்தரம் (சங்கு தீபாந்தராளபூம்) இவைகளைக்கணிக்கலாம்:—



இதன் சம்பந்தமான பொதுவழிகள்:— கீழ்க்காண்க:

சங்கு நிழலின் துனிக்கும், தீபஸ்தம்பத்தின் அடிக்குமுள்ள பூமியினந்தரத்தை சங்குவால் பெருக்கியதை நிழலால் வகுத்த ஈவே தீப (தீபஸ்தம்ப) உயரமாகும்:— (1)—

சங்கு நிழல் கண்டுபிடிக்க:—

சங்கு அடிக்கும் ஸ்தம்ப அடிக்கும் உள்ள அந்தர பூமியை சங்குவால் பெருக்கி (சங்கு உயரத்தால் பெருக்கி) சங்கு கழிந்த தீப உயரத்தால் வகுத்த ஈவே நிழலின் நீளமாகும்: (2)—

இதன் ஸமீகரணமிந்து:—

இங்கு தீபஸ்தம்ப உயரம் = AB; சங்கு = DE. NO; நிழல் = NF, DC; ஸ்தம்பச்சங்கு அந்தரபூமி = AD, AN, ∴

$$AB = \frac{(DE)(AC)}{(DC)} = \frac{(NO)(FA)}{(NF)}$$

$$DC = \frac{(AD)(DE)}{(AB)-(DE)};$$

$$(NF) = \frac{(NA)(NO)}{(AB)-(NO)}.$$

மற்றவை இவ்விதம் யுத்திபோல் ஸாதனஞ்செய்துக் கொள்ளவேண்டியதாகும்:—

$$(AB) = \frac{(DE \times AC)}{DC} \therefore = \frac{24 \times 63}{25} = \frac{1512}{25} = 60\frac{1}{2}.$$

ஆகையால் தீப உயரம் = $60\frac{1}{2}$ ஆகும்:

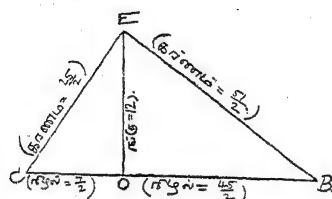
$$(DC) = \frac{(AD \times DE)}{(AB - DE)} \therefore = \frac{38 \times 24}{(60 - 24)} = \frac{912}{36} = 25\frac{1}{3}; \text{ ஆகையால்}$$

நிழலின் நீள = $25\frac{1}{3}$; என்பது

மத்தும் வந்தனவெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்க:—

இவ்விதச் சாயா கேஷத்தாத்தைப்பற்றிய சிற்சில விசேஷகணிதங்கள் கீழே:—

(படம் = 40)



செ கேஷத்தாக்குறிப்பு:—

முன்கூறிய கேஷத்தாப்படிக்கு (AB) ஓர் விளக்குக் கம்பம் (CD) மற்றோர் விளக்குக் கம்பம், என்றும். (OE) யை செ (12 அடி) சங்குவுமாக நிருத்தினால் அப்போ:—

சங்குவின் உச்சியிலிருந்து (EC) என்ற ஓர் கர்ணம், (CO) என்ற இக்கர்ண நிழலும், (EB) என்கிற மற்றுமோர் கர்ணம், (OB) என்கிற இக்கர்ணத்துடைய நிழலும் உண்டாகும். என்பதை முதலில் உணர்க:—

(இங்கு இந்நிழல் கர்ணங்களை எப்போதும் [12 அடி] சங்குவைக்கொண்டே ஏற்படுத்திக்கொள்ள வேண்டியதாகிறது.)

இப்படிக்கணித்தக்கர்ணங்கள் = $(\frac{5}{2} \times 12 = 25\frac{1}{2})$; $(\frac{3}{2} \times 12 = 18)$. இக்கர்ண (நிழல்கள்) சாயைகளும் = $(\frac{4}{2} \times 12 = 24)$; $(\frac{7}{2} \times 12 = 42)$:

கர்ணந்தரம் = $(25\frac{1}{2} - 18) = 7\frac{1}{2}$ அடி

சாயா (நிழல்)ந்தரம் = $(24 - 18) = 6$ அடி

சங்குவோ = 12 அடி.

இவ்விதங்களாக ஆகின்றது என்று தெரிய வந்தால் அச்சமயத்தில், CE, EB, என்ற இருவித கர்ணங்களும்; OC, OB என்ற இருவித நிழல்களும், எவ்வளவு அடிகள் உள்ளவைகளாகும் என்று ஒருவனால் வினவப்பட்டால்

தற்சயம்:— இவைகளைக்கணிக்கப் பொதுவான வழியையிங்குணர்க:—

இவ்விதக் கேள்விகளில் எப்போதும் (சாயாந்தர) நிழலந்தர எண் பெரியதாயும் இதன்கர்ணந்தர எண் சிறியதாயுமாகவே இருக்கும் என்பது முணர்க:—

(இதற்குப் பொதுவிதி):—

தெரிந்தவைகளான:— நிழல் வித்யாஸ வர்க்கத்தில் கர்ண வித்யாச வர்க்கத்தைக் கழித்தம்ச்சத்தால் $\{ 576 = (2 \times 12)^2 \}$ ஐ வகுத்து ஈவுடன் ஒன்று சேர்த்து முலிப்பதால் கர்ணந்தரத்தைப் பெருக்கியதை, இரண்டிடத்தில் வை. சாயந்தரத்தை ஒன்றில் கூட்டிப்பாதி செய்ததும் மற்றொன்றின்மில் கழித்துய்பாதி செய்ததும் இருவிதங்களான நிழல்கள் உண்டாகும் என்பதாம்.

இதன் ஸமீகாணமிங்கு:—

$$\left(\left\{ \frac{(576)}{(\text{நிழலந்தர})^2 - (\text{கர்ணந்தர})^2} \right\} + (1) \right)^{\frac{1}{2}} = கு = குணகம்.$$

$$\left\{ \frac{(\text{இருவித நிழல்கள்})}{= 2 \times (\text{வித்யாஸங் கொண்ட இருவித நிழல்கள்})} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ (\text{கர்ணந்தரம்} \times கு) \pm (\text{நிழலந்தரம்}) \right\}$$

இதற்கு உதாஹரணம்:—

தெரிந்த சாயாந்தரம் = 19, கர்ணந்தரம் = 13, சங்கு = 12.

∴ தெரிய வேண்டிய 2௨ வித்யாஸம் 19ஐக் கொடுத்த நிழல்களைக் கணிக்க:—
19ன் வர்க = 361, 13ன் வர்க்க = 169, இதன் வித்யாஸ = (361—169) = (192) இதற்கு 2௨ (576)ஐக் குடுக்க ஈவு = 3, இதில் 1 சேர்க்க 4. இதன் முலம் = 2. இதனால் 13ஐப் பெருக்க 26. இதில் சாயாந்தரத்தை (19ஐ) கூட்டிக் கழிக்க = 45, 7 இவைகளில் பாதிதான் தெரியவேண்டிய நிழல்களின் ஸமம் = $(22\frac{1}{2} = \frac{45}{2})$ ($3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$) அடியளவில் ஆகுமென்பதாம்.

பற்றும் வருபவை இவ்விதமே.

இச்சாயா (நிழல்) சேஷதரத்தில் மற்றோர் விசேஷமான சேஷத்ராஸாதன கணிதம்:—

படம் 41ஐப்பார்க:—

இங்கு BO = சம பூமி நீளம்; BA; = விளக்குயரம்.

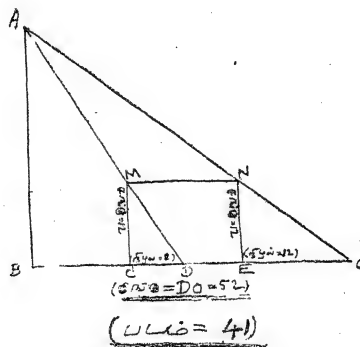
(BO, BD) = விளக்கு அடிக்கும், நிழல்களின் துரிகட்க்கும் உள்ள நீளம்.

(CM = EN) = சங்குகள் = (12 அங்குல உயர முள்ளவை).

இங்கே தெரிந்தவைகள்.

(MC = NE) சங்குகளும், CD = நிழல் 8 அங்குலம். EO = மற்றோர் நிழல் = 12 அங்குலம். DO = நிழல் துரிகள் உள்ள பூமியின் தூரம்.

ஆகையால் தெரிய வேண்டியவைகள்:—



AB = விளக்குபா மென்ன

BD = தூரம் = ?

BO = தூரம் = ?

என்றால் இதைக் கணிக்கும் பொதுவழி:—

இருவித நிழல்களின் துணிகள் உள்ள பூமியந்தாத்தை இஷ்ட நிழலால் பெருக்கி நிழல்களின் வித்யாஸத்தால் வகுத்த ஈவே இஷ்ட நிழல் துணியில் இருந்து விளக்கடிக்குள்ள தூரமாம். இதை சங்குவால் பெருக்கி நிழலால் வகுக்க, பூமிக்கு மேலுள்ள(தீப) விளக்கு உயரம் வரும்.

இதற்கு ஸமீகர்ணம்:— முதலில்:—

$$\left. \begin{aligned} BD &= \frac{DO \times CD}{EO - CD}; BO = \frac{DO \times EO}{EO - CD}; \\ AB &= \frac{BD \times MC}{CD} = \frac{BO \times NE}{EO} \end{aligned} \right\}$$

இனி உதாரஹணம் விவரணம்

செய்யப்படுகிறது:—

$$BD = \frac{52 \times 8}{12 - 8} = \frac{416}{4} = 104; \text{ இதன் முழம்} = \frac{104}{24} = 4\frac{3}{4}.$$

$$BO = \frac{52 \times 12}{12 - 8} = \frac{624}{4} = 156; \text{ இதன் முழம்} = \frac{156}{24} = 6\frac{1}{2}.$$

$$\therefore AB = \frac{104 \times 12}{8} = \frac{1248}{8} = 156.$$

$$= \frac{156 \times 12}{12} = 156 \text{ ரூ-இதன்} = \text{முழம்} = \frac{156}{24}.$$

$6\frac{1}{2} = AB$ தீபம் (விளக்கு) உயரம் அங்குலம் அல்லது முழம்.

இங்கு முழம் 1க்கு அங்குலம் (= 24) ஆகும்.

இவ்வித கணிதவிசேஷமென்னவென்றால்:—

பூமியில் அளக்க முடியாத தூரம் உயரம் இவைகளையும் கணிக்க இயலுமென்பது.

ஆனால் சந்திரன் முதலிய கிரகங்களின் ஸ்தான சம்பந்தங்கள் வெகு தூரம் தாண்டியும் நிழல்முதலிய வித்யாஸங்களை வேறுகக் கணித்தறிவது கஷ்டத்தில் ஆகின்றது. அதுபோலின்றி வித்யாஸமடையுந்தன்மை பெற்ற அவயவங்கள் என்னவையாக இருக்கவேண்டும்: என்பதை முதலி லுணர்க:—

வேறு (சில) விசேஷகணிதமிங்கு:—

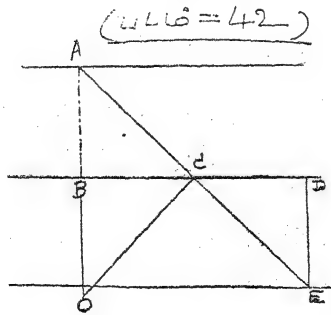
ஆற்றில் நிறையஜலம் போகும் போது இவ்வாற்றை ஜனங்களால் தாண்ட முடியாமல் போகும், தற்சமயம் ஆற்றினகலம் தெரியவேண்டுமேயாகில்:—

இதைக்கணிக்க வேண்டிய விவரணம்:—

இச்சம்பந்த உருவ அமைப்பிங்கு:—

இந்த உருவப்படத்தில் உள்ள:

(படம்-42-ஐக்கவனி)



(AB) = அளக்கமுடியாததாகிய தெரியவேண்டிய நீளம்.

(BC = CD); (DE) இவைகள் தெரிந்துக்கொள்ளக்கூடிய இடங்களாகும். ஆகையால் (DE = AB) என்றாகும்.

விளக்கமின்னும்:—

முதலில் Aஐ எதிர்க்கரையேல் தெரியக்கூடிய ஓர் அடைமான மாகிய அசைவற்ற மரம் அல்லது பாறை முதலியவைகளாகவோ அல்லது வீடு, கோயிலாகவோ கொள்க. பிறகு அதற்கு நேரே-தான் இருக்குமிடத்தில் நேர்க்கோட்டிலையையும்படி தன் முயர்ச்சியால் Bயில் ஓர் அடையாளம் வை. (B)யிலிருந்து தன்னிஷ்டப்படி (C) தூரத்தில் மற்றோர் அடையாளமும், இந்த (C) யிருந்து (BC) அவ்வளவே தூரத்தில் Dயில் மற்றோர் அடையாளமும் வைத்தால்:—

(BC = CD) என்பது ஆகும்.

பின்பு, Dயிலிருந்து DE ரேகையிலேயே - Cஆல் A மறைவுபடும், வரையில் அல்லது ஒரே நேர்க்கோட்டில் ACE ஆகியவைகள் சம்பந்திக்கும் வரையில் பின்னோக்கினால் அப்போ ACE ஒரே நேர்க்கோட்டிலமையும். இப்படி அமையும் E என்கிறவிடத்தில் ஒரு அடையாளம் கூவ: இதன் பிறகே உனக்கு ED எவ்வளவு நீளமோ அவ்வளவே நீளம் AB என்பது புலப்படும்.

ஆகையால்தான் $AB = DE$ என்று ஆய்ற்று.

குறிப்பு:— இங்கே காட்டப்பட்ட (AB) ரேகையை:—

(17—18ம் படத்துக்குச்) ல் சொல்லிய (CB) = (a_1) ரேகையாகப் பாகித்துக் கணிதம் செய்தும் நீளம் நிச்சயித்துக்கொள்ளலாம்

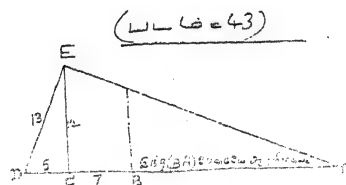
போக முடியாத குளத்தின் எதிர்க்கரை, ஏறிக்கால்வாய் முதலிய அகலங்களை இவ்விதரேகா கணிதப்படித் தெரிந்துக்கொள்ளலாம் சுலபத்தில்:—

(விசேஷம்:—)

(17—18-ம் படத்துக்குச்சொன்ன)கேடிரத்தின் கணித்தாலும் ஷெ (AB)

போன்ற அகலங்கணிக்கலாம். இது கேவலம் கணிதத்தோடு கூடியதாகும்,
(அவ்வளவு சுகமிதற்கில்லை).

(படம் 43) ஐரன்துகவனி



இந்த கேடிரத்தில் நேர்க்கோண முக்கோணங்கள் இரண்டுள்ளன அவைகளாவன:—

$\angle DEA$; இங்கு $= \angle E = 90^\circ$,

$\angle ECA$; இங்கு $= \angle C = 90$

இதில் தெரியவேண்டிய கோடு - BA - இதுவும் ABCD ரேகையிலிருக்கிறது. இங்கு $(AB) = (AD - BD) \therefore$

இங்கு தெரியவேண்டிய கோடு (BA) அல்லது (DA) ரேகை பூராவும்:—

இங்கு தெரிந்தவை $\angle DCE = 5; 12; 13$ புஜங்களடங்கிய முக்கோணம் இதனால்:—

(DA) என்கிற $\angle (DEA)$ ன் ஓர் புஜமாகிய கர்ண நீளங்கணிக்க:—

முன்சொன்னபடி:—

$$\frac{(DE)^2}{DC} = \frac{(DE)(DE)}{DC} = \frac{13 \times 13}{5} = \frac{169}{5} = 33.8 = DA$$

$\therefore (AB) =$ தெரிந்த $(AD - BD) = (33.8 - 5 - 7) = 21.8$
இங்கு:—

$BC = 7 \therefore BD = (7 + 5) = 12 (\therefore \text{முன்போல்})$

$\therefore AB = (33.8 - 12) = 21.8$; என்பது

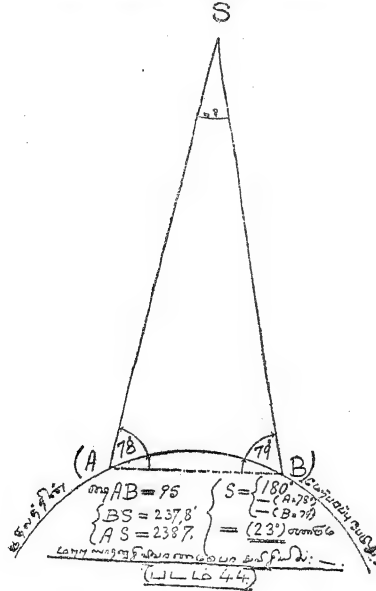
இங்கு தெரியவேண்டிய $(AB) = 21.8$.,

குறிப்பு:—இந்த (B) ஸ்தானத்தில் (CE) ரேகையே இருக்கும் எதிர்க்கரையாக வைத்துக்கொண்டால் (CB) என்கிற கணிதமில்லாமலே சற்று சுலபமாகவும் கணிதம் முடிவுபெறும்.

மற்றும் வந்தனவெல்லாமிப்படிக்கணிக்குக:—

வேறு:—

(படம் 44ஐ நன்கு கவனி):—



இங்கே:—

ரேகைகளையும் கோணங்களையும் வுசரித்த மற்றோர் விசேஷகணிதம்:

சுமாராக:— (B ஸ்தானம்) = மதராஸ் (A ஸ்தானம்) = டெல்லி என்றும், (S) ஸ்தானம் = ஆகாயத்தில் உயரே உள்ள ஓர் நகரத்திரம் என்றுங்கொண்டால் இப்போ AB தூரம், = 95. (A) கோணம் = 78° ; (B) கோணம் = 79° ; இவைகளைக் கொண்டு (S) ஸ்தானத்திய? தெரியவேண்டிய கோணம்; AS அல்லது SB தூரம், இவைகளைக்கணிக்க:—

ஒருமனிதன் மதராஸ்(Bயில்)ஸில் நின்று S என்ற நகரத்திர ஸ்தானத்தை மேலே நோக்க (BS) என்ற ரேகை ஏற்பட இதன் ஸ்கையத்தால் $\angle B = 79^\circ$ ம்;

இதே ஸமயத்தில் மற்றொருவன் Aஸ்தான மாகிய, டில்லி யிலிருந்து S என்ற அதே நகரத்திரத்தை நோக்க AS என்றேற்பட்ட ரேகை ஸகாயத்தால் ($78^\circ = A$) கோணமும்.

மதராஸ் டில்லி தூரமும் நேர் AB ரேகையில் சுமார் ($95''$ அங்குலம்) என்றும், ஏற்பட.

AS, அல்லது BS தூர அங்குலம் என்ன-S ஸ்தான கோணம் (?) என்ன வென்றால்:—

$$S = (180^\circ - A - B)$$

$$= (180^\circ - 78^\circ - 79^\circ)$$

$$= 23^\circ = S \text{ என்பதை முதலில் கணித்துக் கொண்டு.}—$$

மேத மேடிகல் டேபில் (TABLES) படிக்கு புஜஜ்ஜியா என்கிற(ஸைன்)

$$23^\circ \text{ர} = 0.3907.$$

$$79^\circ \text{ர} = 0.9816.$$

$$78^\circ \text{ர} = 0.9781.$$

என்றும் தெரிந்துக் கொள்க

இதற்கு மேல்:—

பொது வழியிங்கே:—

(S கோண = 23°) ஜ்யாவுக்கு இதன்ஸம் முகபுஜமான (AB ரேகை = $95''$) அங்குலமானால் (A கோண = 78°) ஜ்யாவுக்கு (BS) என்கிற ரேகையாகும்:

இவ்விதமே B கோண (79°) ஜ்யாவுக்கு AS என்கிற ரேகை என்பது இவை களும் அங்குலத்தில் தான் வரும்:—

இதற்கு உதாரணம்:—

44ம் படப்படிக்குறிய:—

$$BS = \frac{\text{ஸை A}}{\text{ஸை S}} (AB) = \frac{\text{ஜ்யா A}}{\text{ஜ்யா S}} (AB)$$

$$= \frac{9781}{3907} \times 95'' = \frac{929195}{3907} = 237.8'' \text{ அங்குலம்}$$

$$AS = \frac{\text{ஸை B}}{\text{ஸை S}} (AB) = \frac{\text{ஜ்யா B}}{\text{ஜ்யா S}} (AB)$$

$$= \frac{9816}{3907} \times 95'' = \frac{932520}{3907} = 238.7'' \text{ அங்குலம்}$$

\therefore BS = 237.8 அங்குலம், AS = 238.7 அங்குலம் என்றேற்பட்டது.

AB (ஸ்தானத்திய காட்டுரேகை) அளவுக்குறிய மைல்கள் முயற்சியால் தெரிந்து க்கொண்டு, BS. AS. மைல்களையும் அல்லது இஷ்டஅளவில் நீளங்களையுங் கணித்து க்கொள்ளலாம்.

இங்கு இக்கணித அதிசயத்துக்காக இதன் உருவ விரவணம் மாத்திரமே காட்டப்பட்டது.

விரிவடையும் பயத்தால் இதோடு நிறுத்திக் கொள்ளப்பட்டது.

(வேறு):—

மற்றோர் விசேஷ சேஷத்ரங்களின் கணிதமிங்கு:—

(○ ABCD என்ற வட்டத்தில் $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOA$, என்று நான்கு (திரிபுஜங்களடங்கிய) த்ரிகோணங்கள் அமைந்திருக்கின்றன. ஸ்தா (AO, = OB, = OC = OD) இவைகள் எங்கும் ஒரே ஸமமாகவே அறைவிட்ட அளவாகத்தானிருக்கும். நேர்க்கோடுகள் ($AB = BC = CD = DA$) இவைகள் தான் வில்லோரச்சம் பந்தக்கோடு தான்; வித்யாஸம் அடையுமென்பதாம்:—

இந்த வட்டத்துள் நாலு த்ரிகோணங்களமைந்ததாக உருவம் காட்டப்பட்டது ஒரு வட்டத்துள் இரண்டு த்ரிகோணம் முதல் பல த்ரிகோணங்கள் வறையில் படத்தில் காட்டிய வில்லின் ஓர புஜங்கள் மாத்திரம் ஸமவித்தியாஸத்தில் அமையலாம், அமைக்கப்படும்.

இவைகளைக் கணிக்கச் சூத்திரங்களிங்கு:—

குறிப்பு:— இரு த்ரிகோணமென்பதற்கு:—

படம் 45(-A)

$\angle ABC$, $\angle ADC$ இவ்விரண்டிற்கும் பெரிய புஜம் விட்டமாகிய AC யே யாகுமென்பதுணர்க:—

வில்லைத்தொடும்; நான் உருவமுள்ள AB, போன்ற புஜ நீளங்களைக் கணிக்க:— இப்படி நானாய் நிற்கும் புஜங்கள்:—

படம் 45 (-A)ல் கவனி:—

[ஸமபுஜங்களாகிய இவைகளின் ஸாதனத்துக்கு வேறுவித வழியை இதன்பின் சொல்லப் படுகிறது.] (இங்கு வட்டத்துள்ளமைந்த முக்கோணங்கள் மூன்று முதல் ஒன்பது வையிலுள்ளவை களான புஜங்கட்குக் கணிக்கும்வழி):—

{ (வேண்டிய புஜம் மூன்றாகில்)	=	குணகம்.
{ பெருக்கு மெண்ணின்)	=	103923.
(செ நான்காகில் செ)	=	84853.
(செ ஐந்தாகில் செ)	=	70534.
(செ ஆறாகில் செ)	=	60000.
(செ ஏழாகில் செ)	=	52055.
(செ எட்டாகில் செ)	=	45922.
(செ ஒன்பதாகில் செ)	=	41031.

இவ்விதமிங்கு (மேலே) காட்டிய பெருக்கு மெண்ணுகிய குணகத்தால் வட்டவிட்டத்தைப் பெருக்கியதை லக்ஷத்திருபத்தாயிறத்தால் (120000) ஆல் வகுத்த ஈவே மேற்சொல்லப்பட்ட உருவுள்ள புஜநீளம் (வில்லின் நாண் நீளம்) ஆக வரும். இதற்கு 4 புஜம் (படத்தில் காட்டிய ரேகை AB) கணிக்க உதாரணம் பார்க்குக்:—

இங்கு வட்டத்தின் விட்டம் $AC = 110$ ஆகில் AB, BC, CD, DA' என்பவைகளின் நீள மென்னவென்றால்:—

(விட்டம் = 110)ஐ (84853)ஆல் பெருக்கியது 9333330 இதை (120000) ஆல் வகுத்த ஈவு $77\frac{93333}{120000}$ அல்லது (78) என்றுங்கொள்க:—

இங்கு ஒன்பது தர்யசர்ம் (புஜங்கள்) வரை ஏற்படுமவைகட்குத்தான் குணகங்கள் ஏழுவிதமாகக் கூறப்பட்டிருக்கிறது. விட்டமான வகுக்குமெண் 120000க்கு.

இதற்கு மேலும்-10; 11; 12; 13; 14. 15. 20: 100; 500: முதலிய இஷ்டப்படி புஜங்கள் (திரிகோண புஜங்கள்) அமையலாம். அமைக்கலாம். ஆகையால் இவைகளின் ஸாகனத்துக்குரிய வகுக்குமெண் (120000)க்கு வட்டத்தின் விட்டத்தைப் பெருக்கு மெண்களாகிய குணகங்களைச் சாதனம் செய்யும் வழி:—

பாகைகள் 180° ஐ (நூற்றெண்பத்தை) வேண்டிய முக்கோண எண்ணால் வகு. ஈவுக்குரிய பாகைகளின் புஜஜ்யாவை (SIN) (120000)ஆல் பெருக்கு இதே மேற்கூறியபடி குணகமாகிய பெருக்கு மெண்ணாம்:

உதாரணமிங்கு:—

(முன்னுறையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மேத மேடிகல் டேபிள்படிக்கமைந்த ஜ்யாஇங்கு வேண்டும்.)

தரியசர்ம் (புஜம்) 9க்கு:—

$$\frac{180^\circ}{9H} = 20^\circ \text{க்கு ஜ்யா (ஈஸன்)} = 0.342 \text{ இதை (120000) ஆல் பெருக்}$$

கியது (ஒன்பது புஜகுணகம்) = $(120000 \times 0.342) = 41040$ முன் சொன்ன குணகம் = 41031, இவ்விரண்டின் வித்யாஸம் = 9.

தர்யசர்ம் 4க்கு உதாரணம்:

$$\frac{180^\circ}{4H} = 45^\circ \text{ ஈஸன் (ஜ்யா)} = 0.7071 \text{ இதை (120000)ல்}$$

குணிக்க = (0.7071×120000) இதை = 84852, முன் சொன்னது 84853, வித்யாசம் = 1.

இவ்விதமே மற்ற குணகஸாதனமும்:

த்ரியசரம் (த்ரிபுஜம் = த்ரிகோணம்) 45 ஆனால் அப்போகுணகங்
கணிக்க:—

$$\left(\frac{180^\circ}{45^\circ}\right) = 4^\circ \text{ க்கு } (\text{ஷே டேபிலில் பார்க்க}) \text{ ஜ்யா (ஸைன்) } = 0.0698 \text{ இதை}$$

$$(120000) \text{ ல் பெருக்கிபதுகை } = (.0698 \times 120000) = 8376. \text{ என்பதாகும்}$$

மற்றும் வருவன வெல்லாமிப் படிப்பார்த்துக் கொள்ள வேண்டியது
என்பதை அவசிய முணர்க—

ஸூக்ஷ்மஜ்யாஸாதனத்துக்கு முன் ஸூலபஸர்தனத்தின் பேருட்டு:—
ஸ்தூலமாய்ஜ்யா (ஸைன்) SIN கணிக்கப் போது வழியிங்கு:—

(இஷ்டசாபம் 1° முதல் 90° வரையில் கொண்டும், அநாவட்டம் (பரிதி) 180° —கொண்டாலப்போது இஷ்டபாகை 45° க்கு (ஸைன்) ஜ்யா கணிக்கவேண்டுமென்றால் (இவ்வேலைகள் தசாம் சவீதத்தில் சுகமாக முடியுமாதலால், அம்முறைப்படி.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{இஷ்டசாப ஜ்யா} \\ = (\text{ஸைன்}) \end{array} \right\} = \left\{ \frac{(4 \text{ விட்டம்}) (\text{பரிதி} - \text{சாபம்}) (\text{சாபம்})}{\frac{5}{4} (\text{பரிதி})^2 - (\text{பரிதி} - \text{சாப}) (\text{சாபம்})} \right\}$$

இங்கு பரிதி = 180° ஆகையால் ஷேக்குச்

$$= \left\{ \frac{(4 \text{ விட்டம்}) (180 - \text{சாபம்}) (\text{சாபம்})}{\left(\frac{5}{4} \times 32400 = 40500\right) - (180 - \text{சாபம்}) (\text{சாபம்})} \right\}$$

இதற்கு உதாஹரணமிங்கு:—

பரிதி = 180° , (இஷ்டசாபம் = இஷ்பாகை 45°) க்கு ஜ்யா கணிக்கும்
உதாஹரணமிங்கு:—

180° ல் 45° ஐக் கழித்த மிச்சம் = 135° , இதை 45° ல் பெருக்க — 6075;
இதை 4 ல் பெருக்க = 24300. என்று நிருத்திவிட்டு.

பின்பு:—

ஷே 6075ஐ, 40500 ல் கழித்த மிகுதி = 34425. இதற்கு முன்னிருத்திய
24300 ஐக்குடுத்த ஈவு = 0.7059. என்று வந்தது. இந்த இஷ்ட சாபம் 45°
பாகைக்கு முன்னுறையிலுள்ள மேத மேடிகல் டேபிலைப் பார்க்க ஸைன் (ஜ்யா)
= 0.7071. இவ்விசண்டின் வித்யாஸம் 0.0012.

ஷே 0.7071ஐக் கணிக்க த்ரிகோணமிதி ஜ்யாஸாதனம் இனி கூறுவதைப்
பார்க்கவும்:—

இந்த முன்னுறையில் கண்ட ஸூக்ஷ்மஜ்யா ஸாதனஞ்செய்ய முன்னே சில
உபகரணங்கள் வேண்டியது.

$$\left\{ \begin{array}{l} [\text{ஷே } 45^\circ \text{ ல் பாகைக்கு மாத்திரம் ஜ்யாஸாதனஞ் செய்ய வேண்டுமானால்:—}] \\ [\text{ஜ்யா (SIN) } 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{(0.50)} = 0.707107 \text{ என்பது.}] \end{array} \right\}$$

அவைகளின் விவாணமிங்கு:—

சுத்தமான முறைப்படி ஏற்பட்டவைகளாகிய:—

$$\left. \begin{array}{l} \text{உபவிகலை (1''') க்கு} \\ \text{புஜஜ்யா (SIN)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} [\text{சாபம்} = (\pi \div 180^\circ \times 60^3)] \\ = 0.0000000808022802 \dots \dots \dots \\ 0.0000000808022802 \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{கோடிஜ்யா} \\ = (\text{COSIN}) \end{array} \right\} = 0.9999999 \ 9999999 \ 67355 \dots \dots \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{விகலை (1''') க்கு} \\ \text{புஜஜ்யா (SIN)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{சாபம்} = (\pi \div 180^\circ \times 60^2) \\ = 0.00000 \ 48481368111 \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

$$\text{ஜ்யா} = 0.0000048481368109 \dots \dots \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{கோடிஜ்யா} \\ = (\text{COSIN}) \end{array} \right\} = 0.99999 \ 99999 \ 88247785 \dots \dots \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{கலை (1') க்குறிய} \\ \text{புஜஜ்யா (SIN)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{சாபம்} = (\pi \div 180^\circ \times 60) \\ = 0.0002908882086657 \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

$$\text{ஜ்யா} = 0.0002908882045634 \dots \dots \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{கோடிஜ்யா} \\ = (\text{COSIN}) \end{array} \right\} = 0.999999957692025328 \dots \dots \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ஒர் பாகை (1^\circ) க்குறியவை} \\ \text{யாகிய (சாபம்} = \text{வட்டம்)} \end{array} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{180^\circ} \right\} = \left\{ \frac{3.1415926535897932}{180^\circ} \right\}$$

$$= 0.01745329251994329 \frac{10}{18} = 0.01745329252;$$

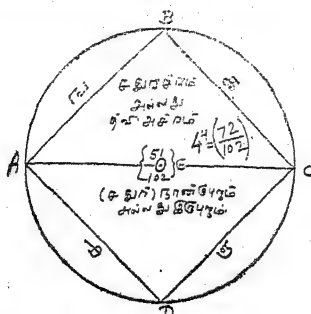
$$(\text{புஜஜ்யா} = \text{SIN}) = 0.0174524 \dots \dots \dots$$

$$(\text{கோடிஜ்யா} = \text{COSIN}) = 0.9999999 \dots \dots \dots = (-1)$$

$$\pi = 3.1415926535897932$$

$$90^\circ \text{ (பாகை) ரு } \left\{ \begin{array}{l} \text{சாபம்} = 1.5707963267948966 \dots \dots \dots \\ \text{புஜஜ்யா} = 1; \\ \text{கோடிஜ்யா} = 0; \end{array} \right\}$$

(வேறு)



(புடம் = 45)

[புடம் (-45)] ஐக் கவனி

(புஜம் = 3)

(இ. பு = இஷ்ட புஜங்கள்) ∴

வட்டஓர ஸம்புஜ நீள = ஜ்யா. $\left(\frac{180}{\text{இ. பு.}}\right)$ ([விட்டம்] = [2 அரைவிட்டம்]) ∴

இதற்குஷ்டத்ரிபுஜ = 3^4

∴ $(180 \div 3^4) = 60^\circ$;

(ஜ்யா 60°) = 0.866

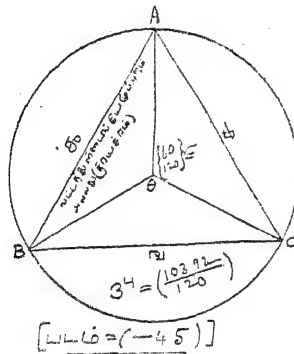
∴ $(0.866 \times 60 \times 2) = 103.92$

∴ க = ங = ச = 103.92 ∴

(மேல் வரும் கேஷத்ரங்கட்கு மிவ்விதமே கணிக்குக) :—

இஷ்ட புஜங்களை (AB = க), (BC = ங), (CA = ச)

ஆ புஜங்கள் 3ரும் = (3^4) எனக் கொண்டதாம் :—



(புட்டம் 45)ஐக் கவனி

வட்டத்துள்ளடங்கிய நாலு புஜம் (அல்லது இருபுஜம்)

$$\left\{ \frac{180^\circ}{4^4} \right\} = 45^\circ;$$

(45° ஜ்யா) = 0.7071

புஜம் = (2 அல்லது 4) $(.7071 \times 102)$
= $(72.1242)' = (AB)'$

(இங்கு இஷ்ட த்ரிபுஜங்கள் 4.

∴ 180ஐ 4ல் வகுக்க 45° வந்தது. மற்ற விவரம் மேல் நோக்குக)

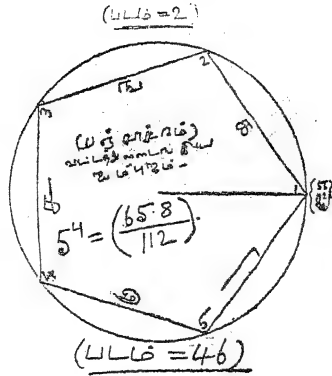
(உள் நோக்கும் பார்வையால் விட்ட அளவில் இருத்திபுஜங்களுமுள்ளதைக் கவனிக்குக); மேல் நோக்கால் நான்காம்

AB = ஈ,
BC = க,
CD = ஞ,
DA = ச,

∴ (க = ஈ = ச = ஞ) ஆனபடியாலிங்கு ஷெ 72.1242 ரூ = (க = ஈ = ச = ஞ) என்ற புஜங்கள் ஸமத்வமாயின : —

மற்றும் வருவன வெல்லா வற்றிற்கும் முன் [படம் 45 (-45)] க்குச் சொன் னதையும் இங்கு சொன்னதையும் நன்கு கவனித்துக் கொள்க:—

(புஜம் 5) = 5⁴



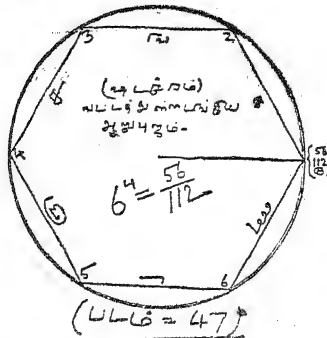
(படம் 46) ஐக் கவனி.

$\left(\frac{180^\circ}{54}\right) = 36^\circ; (36^\circ \text{ ஜ்யா}) = 0.5878$

$(.5878 \times 112) = (65.8336) = க = ஈ = ச = ஞ = ட$

(இங்கிஷ்ட தரிபுஜங்கள் 5 ∴ 180° ஐ 5ல் வகுக்க 36° வந்தது) மற்ற விவரம் மேல் பார்க்குக.

(புஜம் = 6) ரூ = 6⁴



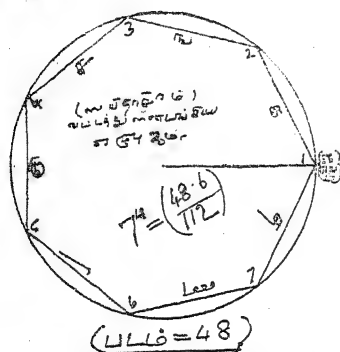
(படம் 47) ஐக் கவனி.

இஷ்டத்ரிபுஜம் 6. ∴ 180°ஐ 6ல் வகுக்க ஈவு 30° மற்ற விமரம் கீழ் கொக்குக)

$$\left(\frac{180^\circ}{64}\right) 6 = 30^\circ; (30^\circ \text{ ஜ்யா}) = (0.5000) (0.5 \times 112)$$

$$= (56.0) = க = ன = ச = ஞ = ட = ண.$$

$$(\text{புஜம்} = 7) \text{ ரு} = 7^4$$



(புடம் 48)ஐக் கவனி.

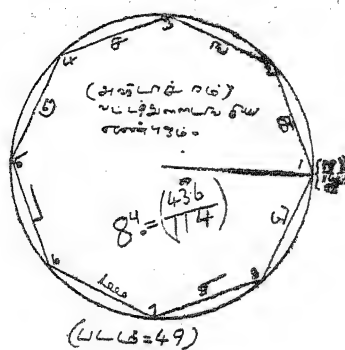
இஷ்டத்ரிபுஜமிதற்கு 7. ∴ 180°ஐ 7ல் வகுத்த ஈவு $(25\frac{5}{7})^\circ = 25^\circ 43'$

$$\therefore \left\{ \frac{180^\circ}{74} \right\} = 25\frac{5}{7}^\circ; (25\frac{5}{7}^\circ = 25^\circ 43') \text{ ஜ்யா} = 0.434 \dots$$

$$(0.434 \times 112) = (48.608)$$

$$\therefore க = ன = ச = ஞ = ட = ண = த = 48.6.$$

$$(\text{புஜம்} = 8) \text{ ரு} = 8^4$$



(புடம் 49)ஐக் கவன.

இதற்இஷ்டத்ரிபுஜம் 8

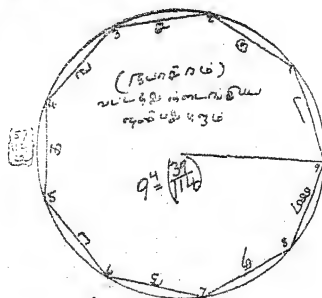
$$\therefore 180^\circ \text{ஐ } 8 \text{ல் வகுத்த ஈவு} = 22\frac{1}{2}^\circ$$

$$\therefore \left(\frac{180^\circ}{84} \right) = 22\frac{1}{2}^\circ; (22\frac{1}{2}^\circ \text{ ஜயா}) = 0.3827$$

$$(.3827 \times 114) = (43.6278)$$

$$\therefore (க = ந = ச = ஞ = ட = ண = த = ந) : -$$

$$(புஜம் = 9) ரு = 9^4$$



$$(படம் = 50)$$

(படம் 50) ஐக் கவனி-

இவற்கிட்டத் தரி புஜம் = 9

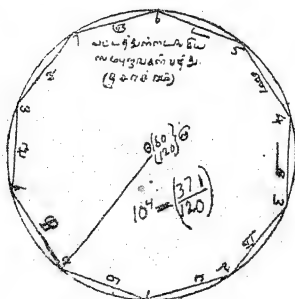
$$\therefore 180^\circ \text{ ஐ } 9^\circ \text{ ஆல் வகுத்தால் } 20^\circ,$$

$$\therefore \left(\frac{180}{94} \right)^\circ = 20^\circ.$$

$$(20^\circ \text{ ஜயா}) = 0.342$$

$$(0.342 \times 114) = 38.988' = \left\{ (க = ந = ச = ஞ = ட = ண = த = ந = ப) \right.$$

$$(புஜம் = 10) ரு$$



$$(படம் = 51)$$

(படம் 51) ஐக் கவனி.

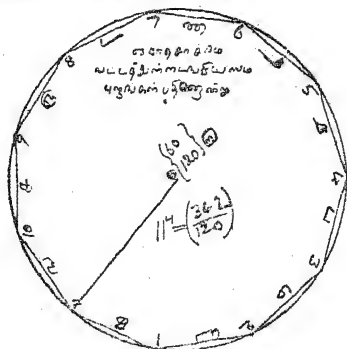
$$\text{இதற்கிட்டத் தரி புஜம்} = (10^4) \therefore \left\{ \frac{180^\circ}{10^4} \right\} = 18^\circ \therefore$$

$$(18^\circ \text{ ஜயா}) = (0.309);$$

$$(.309 \times 60 \times 2) = 37.08$$

$$\therefore க = ந = ச = ஞ = ட = ண = த = ந = ப = ம = 37.08;$$

(இங்கு இஷ்ட புஜம் = 11) ரு = 11⁴

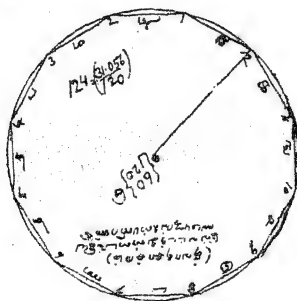


(படம் = 52)

(படம் 52)ஐக் கவனி.

$$\begin{aligned} \text{இஷ்டத்ரி புஜ} &= 11^4; \therefore \left\{ \frac{180^\circ}{11^4 = 11} \right\} = \left(6 \frac{6}{11} = 16^\circ 32' \frac{8}{11} \right) \\ \left(\text{ஜயா } 16^\circ 33' \text{ ரு} \right) &= \left(0.2848 \right) \left\{ (60 \times 2) \right\} \\ &= 34.176 \therefore க = ந = ச = ஞ = ட = ண = த = ந = ட = ம \\ &= ய = 34.176 \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

(புஜம் = 12) = 12⁴



(படம் = 53)

(படம் 53)ஐக் கவனி.

இதற்கிஷ்டத்ரி புஜம் = 12⁴

$$\therefore \left(\frac{180^\circ}{12^4} \right) = 15^\circ$$

$$\therefore \left\{ \left(\text{ஜயா } 15^\circ = 0.2588 \right) (60 \times 2) \right\} = 31.056$$

∴ புஜங்கள் = க = ங = ச = ஞ = ட = ண = த = ந = ப = ம
= ய = ர = 31-056 ;

(மற்றும் வந்தவைகட்கு இவ்விதமேகண்டு கொள்க)

விசேஷக்குறிப்பு:— இவ்வட்டத்தையும் இதைச் சார்ந்துள்ள புஜரேகைகளையும் நன்குற்று நோக்க ஏற்படுவது :—

வட்டத்தின் சுமார் நுழைலோர் பங்கு ($\frac{1}{10}$) பார்வைக்கு வட்டமில்லாத நேர் ரேகையாகவே இருக்கும்.

ஆகையால் முதியோர்களும், வட்டத்தின் தொண்ணுத்தாறிலோர் பங்கு (அதாவது $\frac{1}{8}$) சேவலம் சீட்ச்சி (நீண்ட)ஸால ரேகையாகவே தெரியும் என்கிறார்கள்:—

இதற்கு மேற்கோள் :—

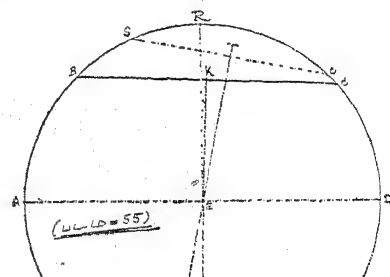
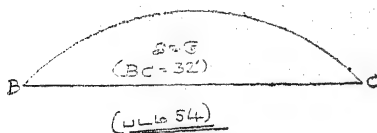
["வருத்தஸ்ய ஷண்ணவத்யம் ச: தண்ட வத்ருச்ய தே து ஸ:"]

எனச்சூரியன், பிர்ம்மா, வ்யாஸர், காசிபர் முதலியோர்களின் வாக்கியமுமாம்:—

இவ்விதம் வட்ட ஓரபுஜங்கள் எவ்வளவுக் கெவ்வளவு அதிகம் ஆகுமோ அவ்வளவுக் கவ்வளவு வட்டச் சமீபத்திலேயே ஆகும். எண்ணிலா புஜங்களாகில் இவைகள் வட்ட ரேகையிலேயே வித்யாஸமின்றி (வட்ட ரேகையாகவே) உருவம் உள்ளதாகும். ஆகையால் இவ்வித வெகு புஜங்கட்க்கும் வட்டத்துக்கும் வித்யாஸமே இல்லை. (இவ்வனந்த) இவ்வித வெகுபுஜக் காரணங்களேக்கொண்டே (தீர்க்கோண மிதி விகிதப்படிக்கும் ($\pi = \frac{\text{வட்டம்}}{\text{வட்டம்}}$) க்குச்சம

என்களின் = ($\pi = 3.1415926535897932 \dots \rightarrow$) என்பது மேற்படுகின்றதைக் கவனிக்குக:—

இங்கு படம் 54, 55 று விவரணம்:—



(படம் 54, 55)ஐக் கவனி.

(BC) என்கிற நாண் நீளம் = 32,

(இங்கு BC என்கிற வில் நீளம் தெரிய வேண்டிய அவசியமில்லை.)

செ (BC) வில் நாண்களாக அமைந்த ஓர் ஸமவட்டத்துண்ட் சேடித்தத்தின் விசாலக்குழி (பாப்பளவு) என்ன:—

என்றால் இங்கு BC வில் கேட்கிற வட்டத்துண்டப் பரப்பளவு தெரிய வேண்டியது அவசியமாகின்றது.

சுத்தமாக இதைக் கணனம் செய்யும்வழி:—

முதலில் BCவில் நான் வட்டத்துண்டத்திலிருந்து (O ABSOCDL) என்ற வட்டமும், இதனால்தான் விட்டமும் (மய்யம்) தயார் செய்துக்கொண்டு பின்பு இவைகளில் இருந்து ஷே BC கேட்கிற விசாலங்கணிக்கவேண்டியது.

இதற்குவிவரம்:—

இனி சொல்லப் படுவந்தற்கெல்லாம் படம் 54விலிருந்தும் இதனால் ஏற்பட்ட படம் 55விலிருந்தும் ஏற்படும் உருவம் எழுத்தடையாளம் இவைகளை எல்லாம் நன்கு கவனிக்குக:—

முதலில் BC என்ற நாண் (நேர்) கோணைப் பாதிசெய்: அதனால் (K) என்ற BCன்பாதி (KB = KC) என்று வரும் இந்த. (K) என்கிற ஸ்தானத்தில் உள் நோக்கி நேர்வம்பமாக (90°ல்) இருக்கும்படி நீண்ட கோடொன்றிழு.

பின்பு உன்னிஷ்டப்படி தெரிந்த அந்த BC வட்டத்துண்டதுள் (SO) என்ற கோடுவரை. இதையும் பாதிசெய்ய (ST=TO) என்ற (SO)யின் பாதி நீளம் வரும். இதிலும் முன்போல் (T) என்ற ஸ்தானத்தில் நேர் ரொங்குத்துக்கோடு (90ல் வம்பமாகும்படி) முன்செங்குத்துக் கோட்டைத்தாண்டும்வறையிலிழு.

இவ்விதமிருகோடுகளும்மீழ்த்தால் இவ்விருகோடுகளும் ஒரிடத்தில் சம்பந்த தித்தேதீரு. இப்படிச்சம்பந்தக்குமிடத்திற்கே (E) என்ற மய்யம் (அதாவது BC என்கிற வட்டத்துண்டத்திற்குரிய ஸம்பூர்ண வட்டத்துடைய நடு மய்யம் = மத்தியம்) அவசியப்பெறும்.

பிறகு (EB = ES = EO = EC) என்றபடி அந்தச்சம்பூர்ண வட்டத்தினுடைய அறைவிட்டம் வரும். பின்பு ஷே (1/2விட்ட) வியாஸார்த்தப்படி கைவாரத்தால் (சம்பாஸினால்) O BSOCDLAB என்ற ஸம்பூர்ண வட்டம் வறைக. [இதைச் சுகத்தின் பொருட்டு இஷ்டப்படி (AD) வியாஸார்த்தமுள்ள அறை வட்டமாகவுஞ் செய்துகொள்ளலாம்.] இங்கு AE = ED. என்பது.

AD = வட்டத்தின்விட்டம், (ED = EA) = அறைவிட்டமுமாகும்.

(பின்பு = AE = EB = ES = EO = EC = ED) இவைகள் யாவும் வியாஸார்த்த மென்கிற அறைவிட்டத்துக்குச் சமத்வமாகவே ஆவது. படம் 55-ல், ஏற்பட்டபடி கவனிக்குக:—

பிறகு (BC) என்ற வட்டத்துண்டமான வில் நாண் கேட்கிறுந்தர்க்கதமாகியக்குழியை (பரப்பை = இஷ்டவட்டத்துண்டத்தின் விசாலத்தை)க் கணிக்க:—

BC என்ற நாணை AD என்ற விட்டத்தால் வகு. வரும்வேஜ்யா (ஸைன்) - (அறைவிட்டம் 1 என்றபடிச் கேற்பட்ட அளவில்), இதனால் ஜ்யாதி (ஸைன் முதலிய) பதகப்படி (TABLES) ஜ்யா சாயம் அல்லது கோணம் தெரிந்து கொள்க. இப்படி வந்தஜ்யா கோணத்தின் பாகாதியால் 180° பாகையை வகு. இவ்விவே BC என்றவில் நாண் போன்ற த்ரிபுஜ (த்ரிகோண) கேட்காங்கள் பூர்ண வட்டத்துள்ளடங்கியது அத்தனை; என்பதைக் காட்டும். இதையே (பெருக்குமெண் என்கிற) குணகம் எனக்கொள்.

அறவிட்டவர்க்கத்தில் (BC)யின் பாதி (KC)யின் வர்க்கத்தைக்கழித்து மூலி இம்மூலமே EKயின் நீளமாகும்.

BCன் பாதியால் செ. EKஐப் பேருக்கியதை பறுபடி குணகத்தாலும் பெருக்கு இதற்கோ கழியும் விசாலமெனப் பெயர். மின்பு முன் கூறியபடி இதற்கேற்படும் (πR^2 ஆகிய) இஷ்டப்பூர்ண வட்ட விசாலத்தில் செ. கழியும் விசாலத்தைக்கழி மிச்சத்தை செ. குணகத்தினால் வரு. கவே. இஷ்ட பாய்த் தெரியவேண்டிய BC என்ற வில் நான் வட்டத்துண்ட கேடற்றந்தர்க்கத மாகிய பரப்பினளவு; அல்லது விசாலக்குழியாம்.

இதன் ஸ்மீகாணம்: — உதாணமும்: —

(BC) கேடந்தாவிசாலக்குழி கணிக்கச் சமீகாணம்: —

= (அதாவது பொதுஸ ஒத்திரம்).

BC, SO என்கிற இரு கோடுகளின் பாதியால் (K.T) ஸ்தானத்தில் நேர்லம்பமாகச் செங்குத்துக்கோடுகள் (KE, TE) அதாவது ($\angle CKE, \angle OTE$) படத்திற் காட்டியபடிக்கும் மேலே பொதுவழியில் கூறிய படிக்கும் நன்கு கவனித்து E மய்ய கேந்திரம் (ஸென்ட்ரல்) ஏற்படுத்திக்கொள்.

மின்பு: —

(EK)ஐ, அளந்துக் கொண்டாலும் நீள மேற்படும். அல்லது

$$(EK) = \sqrt{(ED^2 - KC^2)} = \sqrt{(ED + KC)(ED - KC)}.$$

$BC \times \frac{1}{2} = BK = KC$; $SO \times \frac{1}{2} = ST = TO$; $\frac{1}{2}AD = AE = ED$ என்பவைகளை முன் பொதுவிதியிலேயே கூறப்பட்டிருக்கின்றது.

$$\therefore AE = ED = EC = EO = ES = EB = EA.$$

$$\therefore EK = \sqrt{(EC^2 - KC^2)} = \sqrt{(EB^2 - BK^2)}$$

$$(\text{ஸைன்}) \text{ ஐயா } \angle KEC = \frac{KC}{EC} = \frac{BK}{EB} = \frac{BC}{AD}.$$

அல்லது.

$$[\text{டான்ஜன்ட்} = \text{ஸ்பர்ச்சுரேகா } (\angle KEC)] = \frac{KC}{KE} \text{ என்றமாகும்.}$$

முக்கியக்குறிப்பு: —

$$\angle KEC = \angle E = E^\circ \text{ என்பதாயுணர்க } \therefore$$

$$Q = \text{குணகம்} = \left\{ \frac{(180^\circ)}{(E^\circ)} \right\}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\text{கழியும் விசாலக்குழி}) \\ = (\text{க. வி. குழி}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} Q \times \frac{1}{2} BC \times KE \\ = \frac{\text{குணகம்} \times BC \times KE}{2} \end{array} \right\} = (- \text{க. கு}).$$

பின்பு:—

$$\left\{ \begin{array}{l} (\triangle BC) \text{ நாண்வில் கேந்திர} \\ \text{(விசாலக்குழி) பாப்பு,} \end{array} \right\} = \left\{ \frac{\pi (EC)^2 - (க'கு)}{கு = குணகம்} \right\} \text{ என்பதாம்.}$$

இதற்கு உதாஹரண மிங்கு:—

($\triangle BC$) க் குறிய குழியைக் கணிக்க:—

BC = 32, இதன் பாதி KC = BK = 16,

SO = 24, இதன் பாதி OT = TS = 12,

பின்பு பொதுவிதி ஸூத்ரா விதிகளின் படிச் செய்து ஏற்பட்ட:—

($\triangle BC$) வில் நாண் வட்டத்தினுட கேந்திரஸம்பூர்ண (\odot ABSOCDLA) வட்டத்தின் விட்டமாகிய வியாஸம் = AD = 44,

இதன்பாதி AE = ED = $(\frac{1}{2} \times 44) = 22$:—

என்ற உபகாணங்களை முதலில் தெரிந்தகொண்ட பின்பு:—

(SIN) ஜ்யா $\angle E^\circ = \frac{32}{44} = \frac{8}{11} = (8 \times \frac{1}{11}) = 0.7273$.

இதற்குரிய கோணம் ஜ்யாபதகப்படி $E^\circ = 46^\circ 40' = (46\frac{2}{3})^\circ$

அல்லது KE = $\left\{ (22^2 - 16^2) \right\}^{\frac{1}{2}} = (484 - 256)^{\frac{1}{2}} = (228)^{\frac{1}{2}}$

= $\left\{ (22+16)(22-16) = (38 \times 6) = (228) \right\}^{\frac{1}{2}} = 15.1$

[செ $\sqrt{(228)}$ ன் மூலம் = 15.1] என்பதாம்.

(டான்) ஸ்பர்சரேகா $E^\circ = \left(\frac{16}{15.1} \right) = \frac{160}{151} = 1.06$ ரு

ஸ்பர்சரேகா படம் பார்க்க ஏற்பட்ட தான $E^\circ = 46^\circ 40' = (46\frac{2}{3})^\circ$ என்றுமாகும்.

இந்த $\angle E^\circ$ ஸாதனம் இத்தடம் போல் செய்யலாம்.—

பின்பு:—

$$\left\{ \frac{180}{E = 46\frac{2}{3}} \right\}^\circ = \left(\frac{180 \times 60}{46 \times 60 + 40} \right) = \left(\frac{10800}{2800} \right) = \frac{108}{28} = \frac{27}{7}$$

= $3.857\frac{1}{7} =$ கு. குணகம் = $3.858\frac{1}{7}$ அல்லது 3.8571 :—

$$\frac{BC}{2} \times (KC = KB) = \left(\frac{BC \times KE}{2} \right) = \frac{1}{2} BC \times KE$$

= $(16 \times 15.1) = 241.6$ ஐ செ 3.5871 லும் பெருக்கிய

= $(241.6 \times 3.5871) = (க'கு) = (931.8512)$

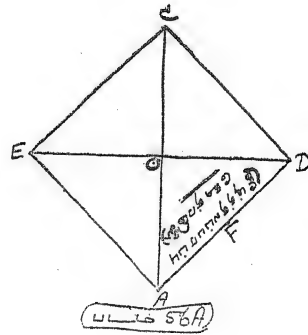
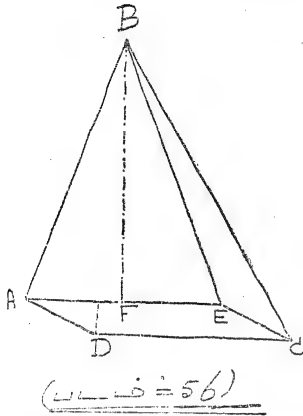
= சுழியும் விசாலக்குழி = க'வி'கு = (க'கு)

முன்சொன்னபடி அறைவிட்டம் 22க்குக்குழி (பாப்பு) = $\pi R^2 = 3.1416 \times 22 \times 22 = 1520.5344$.

(1520·5344 - 931·8512) = 588·6832. இதை
இஷ்டமாயி (BC) வட்டத்துண்ட கேஷ்தாவிசாலக்குழியாம்.
(குழி BC) கு = 588·6832 = 589. என்பதுணர்க:—

(வேறு):—

(படம் 56, 56-A) ஐக் கவனி



படம் (56), (56A).க்களின் கிவாணம்:—

56ம்படம் சதுரக்கூர் கேஷ்தாம். இதனடிப்பாகம் சமச்சதுரமு [படம் 56ல் கண்ட (□AECD)ஐ; படம் 56Aல் (□AECD) என்னும் சதுரமாகவே நிலை] ம் துனியில் புள்ளி உருவமுமாம். ஆகவே இன்னுனிப்புள்ளியும் ஓர் மூலேதான். இவ்விதச் சதுர கேஷ்தாமூலை (சதுரக்கூர்) ப்புள்ளிகள் ஐந்து (5) ஆகும்.

இவ்வித கேஷ்தா உருவங்களில்:—

$$AD = DC = CE = EA = 6; FB = 8; \therefore AF = FE = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\therefore AB = DB = CB = EB = \left\{ (FE)^2 + (FB)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (8^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (73)^{\frac{1}{2}} = 8.544.$$

$$\text{நாலு மேல்தலப்பரப்பு} = 4 \left(\frac{AE \times FB}{2} \right) = 2 AE \times FB$$

$$= (\text{மே.ப}) = 2 \times 6 \times 8 = 96 \dots \dots \dots (1)$$

ஐ நாலு மேல்தலப்பரப்போடு பூமியில் கவிழ்த்து படித்திருக்கும் அடிப்பரப்பு ம் சேர்ந்தால் மொத்தம் (இந்த கேஷ்தாத்துக்கு மாத்திரம்) ஐந்தலப்பரப்பாம்.

கணிதத்தால்

இந்த ஐந்தலப்பரப்பு

$$= \left\{ 4 \left(\frac{AE \times FB}{2} \right) \right\}$$

$$+ \left\{ AE \times AD = AE^2 = EC^2 = CD^2 = DA^2 \right\}.$$

செரு = (மே. ப + கீ. ப). = ($3^2 + 96$) = $36 + 96 = 132$.—(2).

குறிப்பு = படம் 56 ஆல் கண்ட மத்தியமானம் இது (AECD □) ன் கர்ப்பஸ்தானம். இந்த ல் இருந்து (படம் 56ல்) கண்ட உச்சிப்புள்ளி Bக்குச் செல்லும் செங்குத்துக்கோடு கற்பச் செங்குத்துக்கோடு (இதற்கு = 0B), மற்ற-FB-பக்க மத்திச் செங்குத்துக்கோடு என்பதுணர்க:—

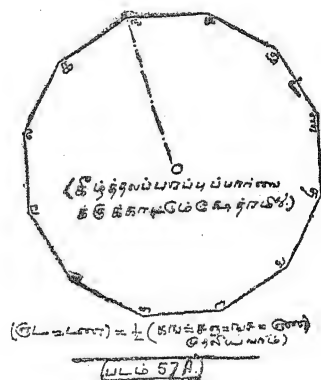
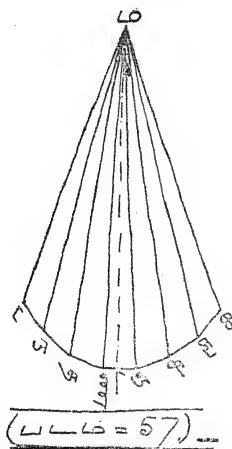
இது ஸமச்சதுரம் ஆகையால்:—

(1). கோடித்திரகனபரிமாணம் = $\frac{1}{3}$ (செங்குத்துக்கோடு × அகலம் × நீளம்).

என்பது.....(3)

செகற்பச்செங்குத்துக்கோடு = $(AB^2 - AO^2)^{\frac{1}{2}}$ என்பதாம்:—

(படம் 57, 57-A)ஜ் கவனி.



படங்கள் (57), (57A)க்களின் விவரணமிங்கே:—

இது “இஷ்ட புஜக்கூர்” கோந்தாம்.

இதன்மேல் தலங்களின் பரப்பு = (இ.பு.மே.த.ப) படம் (57.ஐப் போலவும்).

அடித்தலப்பரப்பு = (இ.பு.அ.த.ப.) படம் (57A) ஐப்போலவும் (ஆக இரண்டு தலப்பரப்பும் ஒன்றாகச் சேர்ந்து இருக்கும். [இத்தவித இஷ்டபுஜ கோந்தாத்துக்குரிய அடித்தலப்பரப்பு பின்வருவம் பற்றி படங்கள் (—45 முதல் 53 வரைக்குமுள்ள) முப்புஜாதி பனிரண்டு புஜங்கள் வரையில் உள்ள வட்டத்துள் எடங்கிய இஷ்டபுஜ கோந்தா ரூபங்களைப் பார்க்க விவரம் நன்கு விளங்கும்] இதற்கும் துனியில் (ம) என்ற ஸ்தானத்தில் புள்ளி உருவ பானமுனை தான். ஆகவே இவ்வித இஷ்டபுஜ கோந்தாக்கட்கெல்லாம் ஏற்படும்மூலைகள் (1 + இஷ்டபுஜ ஸத்திமூலைகள், ஆகிய பிறகுக்களாம்.

(இப்புஜாந்தி மூலைகளும் இதற்குரிய கர்ப்ப கோத்திரத்திலிருந்தேற்படும் வட்டத்தின் கோகை மேலேயேதான் இருக்கும்.)

படம் (57, 57A) —ல் இஷ்டபுஜங்கள் (12) என்பதாகும்.

இதைவிட இஷ்டபுஜங்கள் 3 முதல் நம்மிஷ்டப் படிக்கிறோம் செ 12க்குப் பதிலாக (வட்டரூப) புஜங்களின் எண்கள் உள்ளனவாக அமைக்கலாம், அவசியம் இவ்வித உருவங்களுமேற்படக்கூடும்.

கவனிக்க வேண்டிய சில குறிப்புகள்:—

$$\text{இஷ்ட புஜ எண்களின்} = (\text{இ. பு. எ}) \quad (1).$$

$$(\text{கவ} = \text{ஙச} = \text{சஞ} = \text{ஞண}) \text{ முதலிய (சரி) சமான இஷ்டபுஜ நீள ரேகைகளின்} = (\text{இ. பு. நீ}) \quad (2).$$

$$(\text{மக} = \text{மங} = \text{மச} = \text{மஞ} = \text{மண}) \text{ முதலிய புஜஸந்தி (புஜ ஆதி அல்லது புஜக்கோடி) யிலிருந்து உச்சிப்புள்ளி (ம)வுக்குச் சாய்ந்திருக்கும் நீளம் (சா. நீ)} \quad (3).$$

$$\text{மேல் தலப்பரப்பில் இஷ்ட புஜப் பாதியிலிருந்து உச்சிப்புள்ளிக்குச் சாய்ந்த நீளக்கோடு} = (\text{மட}) = (\text{மே. த. சே. நீ}) = \text{மேல்தலச் செங்குத்துக் கோடு நீளம் (3A).}$$

$$\text{இஷ்ட புஜ நீளப்பாதியின்} = \frac{1}{2} (\text{இ. பு. நீ}) \quad (4).$$

$$\text{இஷ்டபுஜப் பாதியிலிருந்து உச்சிப்புள்ளிக்குச் செல்லும் மேல் தலப்பரப்பில் ஏற்படுங் கோடு நீளம்} = (\text{இ. பு. ம. சே. நீ}) \quad (5).$$

(கூடு நெம்பர் 3Aம் 5ம்) ஒன்றையே குறிப்பது நன்கு ஏற்படுவதற்காக:—

$$O\text{ங} = O\text{க} = O\text{ச} = O\text{ண}) \text{ முதலிய நீளப்பக்க புஜம் சமானமே.}$$

$$(\text{கவ} = \text{ஙச} = \text{சஞ} = \text{ஞண}) \text{ முதலியளவும் சமானமே} = (\text{இ. பு})$$

$$(\text{ஞட} = \text{டண}) = \left(\frac{1}{2}\right) (\text{இ. பு.}) \quad (6).$$

$$\text{என்றமிதற்கு} = \frac{1}{2} (\text{ணத} = \text{தந} = \text{கவ} = \text{ஙச} = \text{சஞ} = \text{யர} = \text{ரல} = \text{லக}) \text{ முதலியவுமுணர்க.}$$

குறிப்புகள் சில கவனிக்க வேண்டியவைகள்:—

$$\text{இஷ்டபுஜ எண்களின்} = (\text{இ. பு. எ}); (\text{கவ} = \text{ஙச} = \text{சஞ} = \text{ஞண} = \text{ணத} = \text{தந}) \text{ முதலிய (சரி) சமான புஜங்களின் நீளம்} = (\text{இ. பு. நீ});$$

[கோதாக்குழி கனம் முதலிய ஸா(நூ)தன விவரணம்].—

இஷ்ட புஜ உச்சிப்புள்ளி உருவ கோதாத்துக்குறிய:—

[மேல் (சாய்வு) தலப் பரப்பின்]

$$= \frac{1}{2} \left[(\text{சா.நீ})^2 - \left(\frac{(\text{இ. பு. நீ})^2}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \times [(\text{இ. பு. நீ}) (\text{இ. பு. எ})] = (\text{மே.சா.த.ப}) \quad (1)$$

[இதன் பூமித் தலப் பரப்பின்]

$$= \frac{1}{2} \left\{ (O\text{ங})^2 - \left(\frac{(\text{இ. பு. நீ})^2}{2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \times \{ \text{இ. பு. எ.} \} = (\text{இ. பூ. த. ப}) \quad (2).$$

[இதன் மொத்தத் தலப் பரப்பின்] = [மே. சா. த. ப] + [இ. பூ. த. ப]... (3).

படம் 57Aல் கண்ட கீழ் தலப்பரப்பின் மத்தியில் உள்ள பிந்து ரூசக எழுத்து (0) ஸ்தானம் இஷ்ட புஜ உச்சிப்புள்ளி உருவகேந்தர கர்ப்ப (மத்ய) கேந்திர பிந்து (புள்ளி) ஆகும்.

(இந்த கர்ப்ப கேந்திரப் புள்ளியில் இருந்து உச்சிப் புள்ளிக்குச் செல்லும் செங்குத் தூயாக் கோடு நீளம்).

$$= (0 ம) = (கர்ப்ப உச்சிக் கோடு) = (கூஉ)$$

$$= \left\{ (சா.நீ)^2 - (0 ம)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (0 ம) \quad (4).$$

$$(0 ம = 0 ல = 0 க முதலியன) = \left\{ (சா.நீ)^2 - (0 ம)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5).$$

$$(இதன் கன பரிமாணம்) = \frac{1}{3} \left\{ (இ. பூ. த. ப) (0 ம) \right\}. \quad (6).$$

என்பதாம்:—

(இதர விதத்தில் ஏற்படும் சகல சந்தேக நிவாரணத்துக்கும் படம் 57, 57Aஐ நன்கு கவனிக்குக).—

மற்றும் இவ்விதம் வருவனவெல்லாம் இந்தப் படிக்குச் சாதனஞ் செய்துக் கொள்ள வேண்டியதாம்.

விசேஷக் குறிப்புகள்:—

(இ. பூ. எ) எவ்வளவுக் கெவ்வளவு அளிகரிக்கின்றதோ அவ்வளவுக்கவ்வளவு (இ. பூ. நீ) மிச்சமிக்கக் குறைந்து வகாராகார ரேகையாகிக் கடைசியில் இது உட்ட ரேகையாக (வட்டமாகவே) யாரும்:— (என்கிற விவரத்தை நன்கு தெரிந்துகொள்ள வேண்டியதற்காகப் பட்டங்கள் — 45 முதல் 53 வறையிலுள்ள) முட்புஜாதிப்பன்னிரண்டு புஜங்கள் பரியந்தமுள்ள உட்டத்தைத்தொடும் இஷ்டபுஜாந்தம் அல்லது இஷ்ட புஜாதியுடைய கேந்திரங்களை நன்கு கவனிக்குக:—)

இவ்விதம் கீழ்த்தலப்பரப்பு பாறுபாடடைவதால் ஸமகேந்திரவட்டங்களும், மேல்தல ஓரப்பரப்பு பாறுபடுவதால் கூறுநிலை கேஷ்டங்களும், ஏற்படுகின்றன:—

[இவ்வித கேந்திரங்களை (சமகேந்திர வட்டத்துக்கு) படம் 1-3-4ம், (கூறுநிலை கேந்திரத்துக்கு) படம் 5ஐயும் பார்க்க நன்கு விளங்கும்]

மேலும் இதைவிட பக்கம் (114ல்) சொன்னபடி இஷ்டபுஜம் 45க்குச் சொன்ன குணகத்தால் வட்டத்துள்ளேற்படும் 45 புஜத்தையும் கேந்திரம் செய்து பார்த்தால் இதன் வாஸ்தவம் இன்னும் நன்கு விளங்கும்:—

அமித (வெகு அதிகரித்த) த்ரி புஜஸந்திப்பால் உட்டமும் இந்த புஜங்களும் வித்யாஸமே இன்றியிருப்பதும் புலப்படும்:—

இவ்வித கேஷ்டாக் கீழ்தலப்பாப்பு கணிக்கும் உதாஹாணத்தை படம் 55ன் (க. கு. = சுழியும் விசாலக்குழி) என்பதைக்கணிக்கும் விவரணத்தில் பார்க்கவும்— மற்றமேல்தலப்பாப்பு கணிக்கும் உதாஹாணம் படம் 56ன் விவரணத்தில் பார்க்கவும்.—

அதுபோல இதைச் செய்ய வேண்டும் என்பதே யொழிய புஜாதி கேஷ்டாக் கணிதம் வெகு வித்யாஸம் என்பதையும் மனதில் நிருத்தி கணித வேலை செய்ய விடை சரிவரும்.—

மற்றுமேற்படுவதற்கெல்லாம்வ்விதமே கண்டு கொள்ள வேண்டியதாகும் என்பதாம்:—

(வேறு)

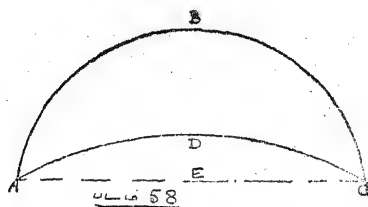
படம் 58, 59, 60 இவைகளின் விளக்கப் பொது விதியிங்கு:—

இவைகளின் ஸாதனத்துக்கு முதன் முதலில் படம் 54, 55ஐயும் இவற்றின் ஸாதகப் பொதுவிதி முதலிய உதாஹாணம் உருவமிவைகளையும் நன்குகவனிக்க:—

இவ்வுரு முதலிய ஸாதகங்களும் ஏற்படும்.

பின்பு:—

இங்கு

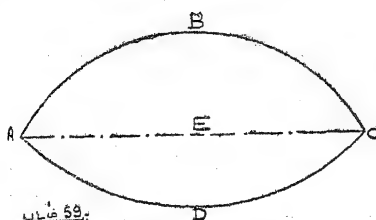


(படம் 58)

$$\left\{ \text{கேஷ்டாக் வட்டத்துண்டக்குழி} \right\} \\ = \left\{ \rho(ABCE \text{ குழி}) - \rho(ADCE \text{ குழி}) \right\} \quad (1).$$

இச்சமீகாணம் படம் 58ஐ ஆகும்.—

இங்கு:—



(படம் 59)

{ (O ABCD என்கிற கேந்த்) }
வட்டத்துண்டக் குழி ரு)

$$= \{ (\ominus ABCE \text{ குழி}) + (\ominus ADCE \text{ குழி}) \} \dots\dots 2.$$

இச்சமீகரணம் படம் 59 ரு ஆகும்.—

எப்போ இப்படத்தில் கண்ட $AE = EC$, $DE = EB$ என்றாகுமோ
சந்தர்ப்பமெல்லாம்.

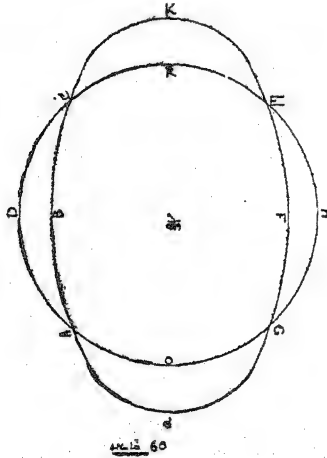
(ஹெரோன் ABCD குழி ரு).

$$= (\ominus ABCE \text{ குழி}) \times 2 = (2 \times \ominus ADCE) \text{ என்றுமாம்.}$$

மற்றும்வருவன இவ்விதமே.—

இப்போதுஇங்கு:—

படம் 60 ஐ முதலில் நன்றாகக் கவனிக்க வேண்டும் பின்பு:—



படம் 60
(படம்-60)

o ADCREHGO என்கிறது ஸமவட்டமும்,

o ABCKEFGP என்கிறது நீள் (நீண்ட) வட்டமுமாகும்.

இவ்விரு வட்டத்தையும் ஒன்றாய் பதிப்பித்திருக்கின்றதாகப் பாவிக்குக:—

அப்போ. —

படம் (58) ருச் சொன்ன விசாலக் குழி கணிதப்படி இங்கும் கணிக்கப் பட்ட:—
(வெளி வட்டத் துண்ட் கேந்த்ரக் குழிகளின் சேர்க்கை.)

$$= (\text{குழி } ABCD + \text{குழி } CREK + \text{குழி } EFGH + \text{குழி } GOAP).$$

என்பதாகும்,—

(மேலுமுவைகட்டுப்பட்ட o ABCREFGOA கேந்த்ரக் குழி ரு)

$$= (\text{நீள்வட்டக்குழி} - GOAP \text{ குழி} - CREK \text{ குழி}).$$

$$(\text{ஹெரோன் சமம்}) = (\text{ஸமவட்டக் குழி} - ABCD \text{ குழி} - EFGH \text{ குழி});$$

..... (3).

என்றுமாகும்.—

∴ (◊ADCKEHGPA' குழி)

= (ஸமவட்டக்குழி + GOAP குழி + CREK குழி)

= { (நீள்வட்டக் குழி) + (ABCD குழி) + (EFGH குழி) } ... (4).

என்றுமாகும்

மேலுமிதல்:— ஆவது.

(ஹெரோனேசுகளில்):— CG = AE, B க் = க் F, O க் = R க். FH = DB, OP = RK என்பவைகளினுடைய கோணம்தவங்கள் கவனிக்கத்தக்கது இவ்வித சேஷ்தாங்களில் ஷெஸ்தான கோணங்கள் ஷெகாட்டிய ஸமத்வத்துக்கு நெருவாக வித்யாஸத்திலுமேற்படலாம். அப்போதும் இவ்வித சேஷ்தாவிசாலங்கணிக்க மேலே குறிப்பிடப்பட்ட ஸமீகாண வழியே உபயோகமாகும் என்பதின் பொருட்டே அச்சமீகாணங்களையும் இவ்விதமே எழுதப்பட்டது என்பது உணர்க.—

இனி வேறு விசேஷ விஷயங்கள்:—

அதாவது 115ம் பக்கத் துடர்ச்சியாகிய கோல சணித ஸம்பந்தமானவைகள்:—

முதலில் இஷ்டபாகைக்கோ, இஷ்டகலைக்கோ, இஷ்டவிகலைக்கோ, இஷ்ட உபவிகலைக்கோ (இ) என்கிற இஷ்டசாபங்கணிக்கவேண்டும். இவ்விஷ்டசாபத்தினுல் தான் (SIN) ஸைன் (புஜஜ்யா) கோடிஜ்யா (S JSIN) கோஸைன் முதலியவைகள் கணிக்கமுடியும். இவைகளைக்கொண்டேஸ்பரிசுடெகைகள் (டான்ஞ்சன்ட்ஸ் = TANGENTS), கோடான் ஞ்ஜன்ட்ஸ் = COTANGENTS) (ஸ்பக = SECANT), முதலியவுங்கணிக்கவேண்டுமாகையால்:—

(முதலில் அறிய வேண்டிய விஷயங்களாவன):—

கோலம் (வட்டம்) 1க்கு:—

ரூசி = 12

ரூசி 1க்கு.பாகம் = 30°

பாகம் 1க்கு, கலை = 60'

கலை 1க்கு, விகலை = 60''

விகலை 1க்கு, உபவிகலை = 60'''

பாகம் (பாகைகள்) = 360°

கலை கலைகள் = 21600.'

விகலைகள் = 1296000.''

உபவிகலைகள் = 77760000''.

கோலத்துக்குரிய வியாஸம் = 1 அரைவியாஸம் = 2; (இங்குவ்யாஸத்தைத் தான் விட்டம் என்னப்படுகின்றது.)

தரிகோணமிதிவிகிதங்களாகிய மேசமேடிகல் டோபில்கல் (0° TO 90°) அல்லது (-0° TO -5400' அல்லது) (-0° TO -24000''); (இங்கையேல் (-0° TO -19440000-')) இவ்வளவுவரையில் ஸாதனம் செய்யப்பட்டால்போதும். 360°, 21600', 1296000'', 77760000''- இவைகளடங்கியவட்டம் பூராவும் ஸாதனம் செய்யவேண்டியதில்லை.

ஆகையால்:—

இவைகளின் ஸாதனத்துக்குக் குணகஎண்வேண்டும்:— ஆனபடியால் இக் குணகஸாதனம்:—

இஷ்டமாகிய பாகை கலை விகலை உபவிகலைகளை இஷ்டஎண்களாகப்பாவித்தால் முறையே இவைகளின் ஹாரகங்களும் 180° - 10800' - 648000'' - 38880000''' — என்பவைகளாம்—

ஆகையால் பாதிஉபவிகலைகளுக்கும் இஷ்டசாபமாகிய (இ''') கணிக்கவேண்டுமானால் (இஷ்டசாப உபவிகலைகலை இங்கு 0-'''1-'''2-'''3-'''4-'''5-'''6-'''7''' TO 19440000''' எனில் இவைகளுக்குச்சமம் இஷ்டஉபவிகலைகள் (இ) என்று கொண்டால்) இப்போ:—

$$(செ.இ''') = (3.1415926535897932) \times \left\{ \frac{\text{இஷ்டஉபவிகலைகள்}}{=(I.TO.19440000)'''} \right\}$$

என்பதாகும்:— (1)

இஷ்ட சாபவிகலைகளுக்கு ஜ்யாதி ஸாதனங்கள் வேண்டின் இவைகட்டுக்குச்சமம் = 0'' - 1'' - 2'' - 3'' - 4'' - 5'' - 6'' - 7'' - 8'' - 9'' - 10'' to 324000'' ஆனால் இவைகளுக்குச் சமம் இஷ்டவிகலைகள் (இ) எனக் கொண்டால் இப்போது கணிக்க வேண்டிய.

$$(இ''') = (3.1415926535897932) \left\{ \frac{\text{(இஷ்டவிகலைகள்)}}{=(I-T 0-324000)''} \right\}$$

என்பது.— (2)

இஷ்ட சாபகலைகளுக்கு செ (இ) வேண்டியவை களாகில்:

0' - 1' - 2' - 3' - 4' - 5' - 6' - 7' - 8' - 9' - 10' to 5400' இவைகளை இஷ்ட கலைகளாகக் கொண்டால் தற்சமய மெல்லாம்கணிக்க வேண்டிய வைகளாகிய

$$(இ'.) = (3.1415926535897932) \left\{ \frac{\text{(இஷ்டகலைகள்)}}{=(I-TO-5400') } \right\}$$

என்பது (3)

இஷ்டபாகைகளுக்கோ செ (இ) வேண்டியதாகில்:— இங்கிஷ்டபாகைகளின் = 0° - 1° - 2° - 3° - 4° - 5° - 6° - 7° - 8° - 9° - 10° - 11° - to 90° ∴

$$\therefore (\text{இ}^\circ - \text{மு}) = (3.14159265359) \left\{ \frac{(\text{இவ்வுட்பாக்கள்})}{(180^\circ)} \right\} = \frac{(1^\circ - \text{TO} - 90^\circ)}{(180^\circ)}$$

என்பது

—(4)

இவ்விதம் இந்த (இ)கணித்தறிந்தபின்பு:—

$$(1), (\text{புஜஜ்யா}) = \text{இ} - \frac{\text{இ}^3}{\angle 3} + \frac{\text{இ}^5}{\angle 5} - \frac{\text{இ}^7}{\angle 7} + \frac{\text{இ}^9}{\angle 9} - \frac{\text{இ}^{11}}{\angle 11} + \frac{\text{இ}^{13}}{\angle 13} - + - + \rightarrow.$$

$$(2), (\text{கோடிஜ்யா}) = 1 - \frac{\text{இ}^2}{\angle 2} + \frac{\text{இ}^4}{\angle 4} - \frac{\text{இ}^6}{\angle 6} + \frac{\text{இ}^8}{\angle 8} - \frac{\text{இ}^{10}}{\angle 10} + \frac{\text{இ}^{12}}{\angle 12} - + - + \rightarrow$$

$$\text{குறிப்பு:— } \text{செ} \because \angle 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120. \left. \begin{array}{l} \text{செ} \because \angle 6 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720. \end{array} \right\}$$

(மேன் மேலும் இவ்விதமே):—

என்பதாயுணர்க.—

(— + →.) முதலியவிகிதங்கள் 15, 17, 19, 21, 23, (14, 16, 18, 20, 22, 24,) இன்னும் மேன்மேலும் (இ) இதேகதியில் முடிவின்றி அமிதமாய்க்கணிக்க வேண்டியதைத் தகுறிக்கும். நமக்கு வேண்டியவையெல்லாம் கணித்துக்கொள்க:—

இவ்விதம் ஜ்யா கோஜ்யாக்கள் இவ்வுட்பாக்கள் பாக கலா விகலா பவிகலாதிகட்குத் தெரிந்தபின்பு:—

(இங்கு அரைவிட்டம்) = (த்ரிஜ்யா = 1) = ஒன்று, எனக் கொண்டிருப்பதனால்.

$$\text{ஸ்பரிசரேகை} = \frac{\text{புஜஜ்யா}}{\text{கோடிஜ்யா}}; \quad (3)$$

$$\text{கோடிஸ்பரிசரேகைக்குச்} = \frac{\text{கோடிஜ்யா}}{\text{புஜஜ்யா}}; \quad (4)$$

$$\text{ஸ்பரிசகர்ணம்} = \frac{1}{\text{கோடிஜ்யா}}; \quad (5)$$

$$\text{கோடிஸ்பரிசகர்ணம்} = \frac{1}{\text{புஜஜ்யா}}; \quad (6)$$

$$\text{வ்யுத்தக்ரமஜ்யா} = (1 - \text{கோடிஜ்யா}),$$

90° பாகைக்கு மேல் 180° பாகை வரையில்:—

$$\text{வ்யுத்தக்ரமஜ்யா} = [(1) + \text{ஜ்யா} (\text{புஜஜ்யா} - 90^\circ)] \quad (7)$$

$$\text{கோடிவ்யுத்தக்ரமஜ்யா} = (1 - \text{புஜஜ்யா}); \quad (8)$$

$$\text{ஜ்யோஜ்யாகர்ணம்} = \text{கார்டு} = (\text{CHORDS}) = \sqrt{(1 + \text{வ்யுஜ்யா}^2)} \quad (9)$$

(வ்யஜ்யா = வ்யத்த்ரமஜ்யா = உஜ்யா) என்றுஞ் சொல்வார்கள்.

மேலே சொல்லப்பட்ட புஜ்யா ஸாதனத்துக்குச் சுலபமான மற்றோர் வழியு முண்டு:—

ஜ்யாஸாதனம் இஷ்ட பாகைகளுக்கானால்:—

90°ம் பாகஜ்யா = (த்ரிஜ்யா)வின் முதல் ஜ்யாவை ரட்டித்தது சேத்யகம்.

இதை எந்த இஷ்டபாகத்துக்குஜ்யா வேண்டுமோ இதன் முன்பாகஜ்யாவால் குணி;த்ரிஜ்யாவால்வகு, ஈவில் குணித்தஜ்யாவின் முன்பாகஜ்யாவைக்கழி. மிச்சமே இஷ்டபாகஜ்யா-ஆகும்:—

[(த்ரிஜ்யா என்றால் த்ரிருசீஜ்யா என்பது) பூர்வீகர்கள் த்ரிஜ்யாவை 3438' என்கிறார்கள், சுலபத்துக்கு நவீனர்கள் த்ரிஜ்யா = 1 எனக்கொண்டார்கள். இதை அனுசரித்தே முன்னுரையிலும், ஜ்யாதிகளின் விகிதம் பதகம் தயார் செய்யப் பட்டிருக்கிறது] :—

இதற்கு உதாரணம்:—

சேத்யகம் = $2 \times \sqrt{(1 - 0.01745 \times 0.01745)}$ பரதிபாகஜ்யா ஸாதனஞ் செய்ய:—

ஷெ ரு = $(0.9998 \times 2) = (1.9996) =$ சேத்யகம்.

ஜ்யா 2° ரு = $(\text{சேத்யகம்} \times \text{ஜ்யா } 1^\circ \div 1) - (\text{ஜ்யா } 1^\circ) \text{ ரு.}$

= $(1.9996 \times 0.01745 \div 1 - 0.0000) = 0.0349 = (\text{SIN } 2^\circ)$

ஜ்யா 3° ரு = $(\text{சேத்யகம்} \times \text{ஜ்யா } 2^\circ \div 1) - (\text{ஜ்யா } 1^\circ) \text{ ரு}$

= $(1.9996 \times 0.0349 \div 1) - (0.01745) = \text{SIN } 3^\circ = 0.05233.$

ஜ்யா 4° ரு $(\text{சேத்யகம்} \times \text{ஜ்யா } 3^\circ \div 1) - (\text{ஜ்யா } 2^\circ) \text{ ரு}$

$$= \left(\frac{1.9996}{1} \times 0.05233 - 0.0349 \right) = 0.06975 = \text{SIN } 4^\circ$$

ஜ்யா 5° ரு = $[(\text{சேத்யகம்} \times \text{ஜ்யா } 4^\circ \div 1)] \text{ ரு.}$

= $[(1.9996 \times 0.06975 \div 1) - (0.05233)] \text{ ரு}$

= 0.08715 = SIN 5°.

என்றிவ்விதமே ஒவ்வோர் பாகைகளுக்கும் சுலபத்தில் ஜ்யாஸாதனம் செய்து கொள்ளலாம்.

இவ்விதம் ஜ்யாக்கள் மாத்திரம் தெரிந்தவிடத்தில் கோடஜ்யா ஸாதனம் செய்ய.—

கோடஜ்யா = $\sqrt{1 - (\text{ஜ்யா} \times \text{ஜ்யா})}$ என்றிப்படிக்கணிக்குந்,

இவ்வழிப்படிக்குக் கலாதிசட்டுக்கும் ஜ்யாக்கள் ஸாதிக்கவேனுடாகில்;—

89° 59'க்கு (SIN) ஜ்யா = 0.999999996 என்றவதால் இங்கு இதன்ரட்டி (1.999999992)ப்பே சேத்யாகம். இந்தப்ரதிகலை ஜ்யாஸாதக சேத்யகம் = 1.999999992. இதை சுயாரில் (2) எனக்கோள்ள; பெருக்கி வகுத்து மேன்சன் அடிபடுவதால் கேவலம் பெருக்கப்படுமெண்ணினிரட்டிப்பே நிற்கின்றது.

ஆகையால்:—

$$\left. \begin{aligned} & \text{(ரண்டாம் கலைஜ்யா)} \\ & = \text{SIN } 2' \end{aligned} \right\} = \left\{ (\text{முதல் கலைஜ்யா} \times 2 - \text{ஜ்யா } 0') \right\}$$

$$(\text{ஜ்யா } 3' \text{ ரு}) = (\text{SIN } 3') = \left\{ (\text{ஜ்யா } 2' \times 2) - (\text{ஜ்யா } 1') \right\}$$

$$(\text{ஜ்யா } 4' = \text{SIN } 4') \text{ ரு} = \left\{ (\text{ஜ்யா } 3' \times 2) - (\text{ஜ்யா } 2') \right\}$$

[என்றிவ்விதவழியாகும் இதுவும் 7ஸ்தானம் பரியந்தம் வெகுசுத்தம். இதற்கு மேலும், மிகசுத்தஜ்யா வேண்டுமேயாகில், முதல் பாகஜ்யாவை எத்தனை ஸ்தானம் சுத்தமாகக்கணித்து, இதன் கோஜ்யாரட்டிப்பு சேத்யகமும், எத்தனை ஸ்தானம் சுத்தமாக வகுக்கிறதோ அத்தனை ஸ்தானங்களுக்கு கலாதி (அல்லது பாக) ஜ்யாவும் சுத்தமாகவே வரும் என்பதால்:—

(இவ்விதமே — விகலா — உபவிசலாதி — களின் சுத்த ஜ்யா ஸாதனத் துக்குமாம்).]

என்றிவ்விதமாகையால்:—

ஜ்யா (SIN) வேண்டிய இஷ்டகலை முன் ஜ்யாவைரட்டிப்பதிவிதன் முன் ஜ்யாவைக்கழிக்க இஷ்டகலாதிசட்டுயிய ஜ்யா; டெஸிடல் 7-ப்பறைஸ்வரையில் ஸரி வரும். விகலாதிசட்டுக்கோ வென்றால் சேத்யசானுஸாரமாக (9, 14-)ப் பறைஸ்வரையில் ஸரிவருமென்பதை முக்கிய அவசியமாயுணர்க:—

இவைகளே இங்கு முக்கிய ப்ரதான வழிகள். (மற்றவை இங்கவ்வளவசிய மில்லை. என்பதால் விபேட்டன):—

இந்தப்படி மேலே கூறிய ப்ராசீனபத்தி வழிப்ரகாரம் ஏற்பட்ட ஸாரம் யாதெனில்:—

∴ ஓரிஷ்ட சாபாம்ச = A, மற்றோர் சாபம் = B, என்றால்:—

$$\begin{aligned} & \text{ஜ்யா } (A + B) = 2 \text{ ஜ்யா } A. \text{ கோஜ்யா } B - \text{ஜ்யா } (A - B) \\ & = \text{SIN } (A + B) = 2 \text{ SIN } A \times \text{COSIN } B - \text{SIN } (A - B) \end{aligned}$$

என்றதன் விலோமமாகிய, நவீன கணித ஸமீகாணத்துக்கு மூலமாகிய :—

$$\therefore \text{ஜ்யா } (A + B) = (\text{ஜ்யா } A. \text{ கோஜ்யா } B + \text{கோஜ்யா } A. \text{ ஜ்யா } B) \therefore$$

[“ சாயோ ரிஷ்டயோ: ” எனக்கீழ்வரும்]:—

பாஸ்கார சார்ய பத்பாநுஸாரஸூத்ர மேற்பட்டதற்கும் மூலசாரண வழி, இதன் முன் உதாரணத்தில் காட்டப்பட்ட ரிஷ்களின் பத்ததி, ஸூத்ரங்சமீகரணங்களேபாகும்; என்பது ஆழ்ந்த யோசனையால் உணர்த்தக்கதாகும். வெகுப்புராதின காலத்கய ஆர்ய பட்டறேவிட்டத்தை (20000) என்றும் இதன் பாதியறை விட்டத்தை (10000) என்றும் கணித சுலபத்தின் பொருட்டுக் கொண்டுள்ளார்.

இவறைப்பின்பற்றியேதான் நவீனரும் அறை விட்டத்தை (10000 = 1) பதினாயிறத்துக்குபத்தில் ஒன்று எனக் கொண்டது.

இந்த அறைவிட்டம் 1க்குச் சாதனம் செய்த இஷ்டபாகாதி ஜ்யாக்களை இஷ்ட அறைவிட்டத்தின் பரிமாணத்தால் பெருக்கினால் இஷ்ட வ்யாஸார்த்த மாகிய அறை விட்டத்துக்குறிய கோலீய (வட்டச்சம்பந்தத்துக்குறிய) ஜ்யாதிகளாகும் :—

உதாரணமாகப் பூர்வீகர் (ஆர்பட்டர் சவிற) அறைவிட்டமாகிய வ்யாஸார்த்த சச்சமம் = (3433)' என்று கொண்டிருந்தபடியால் இவர்கள் இஷ்டப்படி 30 பாகைக்கு ஜ்யா, வேனுமானால் $\therefore (\sin 30^\circ \times 3438) = 0.5 \times 3438 = 1719'$ என்பதாகும்.

மேலுமிவர்கள் இஷ்டப்படி, பசண கோல நிலைகளின்.

= 21600' ரு = [(3438' \times 6. 2832) இதன் கரா =

= [(3437' — 44" — 48") [2 \times 3.14159265]

இதே எதற்கும் சாஸ்திரத்தை யனுசரித்தது :—என்பதாகும்.

இதற்குப் புறம்பானவைகள் சுலபத்திற்கு சௌகர்யப்படி ஏற்படுத்திக் கொள்ளப் பட்டது என்பது உணர்க :—

LAOORITHMS (லாகாரிதம்ஸ்) தெரிந்தால் இன்னுஞ் சுலபத்தில் ஸகல கணிதங்களையுங் கையானத்தகுமென்பது அவசியமுணர்க.

ஷெக்குச் சரியான விவரணமிங்கு.

இவ்விதம் ப்ராசின பத்ததிப்படி ஏற்பட்ட வழியின் ஸாராப்சம் யாதெனில்:—

இஷ்ட இருவித சாபாப்சங்ளை முறையே — அ — க—என்று கொள்ள:—

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \text{ஜ்யா (அ + க)} = \frac{\text{ஜ்யா அ.கோஜ்யா க}}{\text{த்ரிஜ்யா}} + \frac{\text{கோஜ்யா அ.ஜ்யா க}}{\text{த்ரிஜ்யா}} \quad (1) \\ \text{ஜ்யா (அ - க)} = \frac{\text{ஜ்யா அ. கோஜ்யா க}}{\text{த்ரிஜ்யா}} - \frac{\text{கோஜ்யா அ.ஜ்யா க}}{\text{த்ரிஜ்யா}} \quad (2) \end{array} \right\} \therefore$$

யோகாந்தர ஜ்யா ஸாதனத்திற்கு:—

“ சாயோரிஷ்டயோர்த்தோர்ஜ்யே

மித: கோடிஜ்யகாஹதே”

த்ரிஜ்யா பத்ததே தயோரைக்யம்.

தச்சாபைக்யன்ய தோர்ஜ்யகா

சாபாந்தரஸ்ய ஜீவாஸ்யாத்

தயோரந்தரஸம்மிதா ”

என்கிற

ஸ்ரீபாஸ்கராசார்ய வசனத்துக்கு (1, 2) ஆகிய ஆர்ஷ (ரிஷிகள் ஸம்பந்த) பத்ததிஸமீகாணமே மூலமாகும். இவ்வாண்டையும் ஆகாரமாகக் கொண்டு இவற்றை விலேகணிதப்படி போகாந்தரஞ் செய்ய:—

(இங்கு த்ரிஜ்யா = 1 ::) ∴

(3), ஜ்யா (அ + க) + (அ - க) = (2 ஜ்யா அ. கோஜ்யா க) ∴

இதையும் விலோம கணிதத்தால் கீழ் கண்டபடி செய்ய:—

(4), ஜ்யா (அ + க) = 2 ஜ்யா அ. கோஜ்யா க - ஜ்யா (அ - க) ∴

மகர்ஷிகளோ த்ரிஜ்யாவை (1க்குப்பதிலாக) 3438', - 10000, - 120, - 3415, - என்றிவ்வித மெல்லாம் கொண்டிருக்கிறபடியால்:—

(5);-ஜ்யா (அ + க) = $\left\{ \frac{2 \text{ ஜ்யா அ கோஜ்யா க}}{\text{த்ரிபஜ்யா}} \right\} - \{ \text{ஜ்யா (அ - க)} \}$ இதில்

த்ரிஜ்யாவாகிய (3438'-ஏ) ஹ பசமாய மைந்தது. மகர்ஷிகள் வாக்யத்துக்கு:—

(குறிப்பு):— ஆகையால் இவ்வவந்தாம் வழியைவிட கணிதசுலபத்திற்காக —4ம் வழியைக் கொள்ளலாம், இவ்வித மேற்படும் ஜ்யாநிகளை இஷ்டவ்யா ஸார்த்தங்களால் (3438, 10000, 1000, 100, 120 - 12 - 3415) (ஸ்ரீபதிஸம்மதவ்யாஸாத்தம் = 3415 என்பது) இவைகளால் பெருக்கிக் கொள்ள இஷ்ட வ்யாஸார்த்த ஜ்யாநிகளாகும்.

பத்யரூப வசனத்துக்கே ஆர்ஷஸ மீகரணமாகிய:—

ஜ்யா (அ + க) = $\left\{ \frac{2 \text{ ஜ்யா அ. கோஜ்யா க}}{(\text{த்ரிஜ்யா})} \right\} - \{ \text{ஜ்யா (அ - க)} \}$

= $\left\{ \frac{(2 \text{ கோஜ்யா க} \times \text{ஜ்யா அ})}{(\text{த்ரிஜ்யா})} \right\} \{ \text{ஜ்யா (அ - க)} \}$ இதையே இங்கு

(2 கோஜ்யா க) வை “சேத்யக” மாகவும், “ஜ்யா அ” வை இஷ்ட பாகத்தின் முன்பாகஜ்யாகவும்; கழிவு ஜ்யாவாக “ஜ்யா (அ - க)” இதையும், “ஹாரமாக த்ரிஜ்யாவையு” ன்கொண்டு:—

மகர்ஷிகள் ப்ரதிபாக ஜ்யாஸாதநம் செய்தார்கள். என்பதை அவசியம் உணர்த்தக்கதாம்:—

மேலுமிவர்கள் இஷ்டப்படி ஏற்பட்ட வ்யாஸார்த்தத்தால் (3438' ஆல்) பகண கோல கலைகளுடைய = (21600)'ரூ = (3438' × 6.2832) ஆர்யபடியப் படிக்கு இதன் மிக்கக்கூர் ஷெ ரூ = [(3437' - 44" - 48'') (6.28318531)] என்பது மவசியம் உணர்க. (மற்ற விவரணம் முன் காண்க).

இந்த விதம் ப்ரதி பாகாதி (ப்ரதி அம்ச கலைவி கலை உபவிகலை முதலிகளை சுளுக்கு ஜ்யாதி ஸாதனம் செய்யும் சுலபபாகார) (ஸம்மதம்) ஆதி ஸித்தாந்த கல்ப்பதரு முக்தாஹாரப் படிக்கேயாகும்:—

இதில் ப்ரதி பாகஜ்யா ஸாதகபத்ததியில் சொல்லிய பத்யங்களான:—

“அந்த்யூயா நவதிஜ்யாச த்ரிபஜ்யா த்ரிபமௌர்விகா” விஷ்கம்பாத்தம் நு
வ்யாஸார்த்தம் த்ரிஜ்யா நாமாநிசகூதே “ (1)”

தந்தேபபாஹுருது (62832) மிதவ்ருத்தே வ்யாஸார்த்தமயுத (100000) ஸங்க்
யாஸ்யாத்” சக்ரகலா (21600) ஸமவ்ருத்தே, வ்யாஸார்த்தம் கஜபுராப்த்தி வஹ்ரி
(3438) மிதம்” (2)”

பரிதே: கார்க்கராமாம் (360)ச: ஏகாம்சஜ்யார்த்தமுச்சயதே”
ஏகாம் சஜ்யார்த்தவர்க்கோந த்ரிஜ்யாவர்க்காச் ச யத்பதம் “(4)”

ஏகோந நவதிஜ்யாச உபார்த்த்யஜ்யா பாகிர்த்திதா”
ஏகோந நவதிஜ்யார்த்தம் த்விநிக்கம் (சேத்யகம்) பவேத் “(4),

ஏகபாகஜ்யார நிக்கம் சேத்யம்வ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலம்”
த்விதியபாக ஜீவாஸ்யாத் இத்துத்தம் தத்வவேதிபி: “(5)”

த்விதியபாக ஜீவாந்நே, சேத்யே, வ்யாஸார்த்தஹ்ருத்பலே”
ஏகபாகஜ்யார ஹீநேத்ருதியாம் சஜ்யகாஸ்ம்ருதா “(6)”

த்ருதியாம்சஜ்யகாநிக்கே சேத்யேவ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலே”
த்விதியஜ்யார்த்த ஸம்ஹீநே சதுர்த்தாம் சஜ்யகாபவேத் “(7)”

சதுர்த்தஜ்யார்த்த நிக்கம் யத் சேத்யம் வ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலம்”
த்ருதியாம்சஜ்யயாஹீநம் பாணாம் (௭) சஜ்யாததாபவேத் “(8)”

சராம்ச (௮) ஜ்யாதயாநிக்கே சேத்யேவ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலே”
துரியாம் (௯) சஜ்யயாஹீநே ரஸாம் (௧௦) சஜ்யேதிகீர்த்திதா “(9)”

ஷடம்சம் சஜ்யாதயாநிக்கம் சேத்யம் வ்யாஸார்த்த ஹ்ருத்பலம்”
விஷயாம் (௧௧) சஜ்யயாஹீநம் தத்ஸ்வராம் (௧௨) சஜ்யகாஸ்ம்ருதா “(10)”

ஏவம்ஜ்யார்த்தாநிநவதிம் ஸாதயேத்பண்டிதோத்தம்”
ஜ்யோத்பத்தி: தர்சிதாப்யேவம் கோலவித்பிரம்மஹர்ஷிபி: “11”

வ்யாஸார்த்தவர்க்காத்பாஹுஜ்யாவர்க்கஹீநாச் சயத்பதம்”
கோடிஜீவா தயா ஹீநாத்ரிஜ்யா வ்யுத்தக்ரமமௌர்விகா “12”

த்ரிஜ்யாஹதாபாஹுஜீவா கோடிமௌர்வ்யாவிபாஜிதா”
ஸப்ததந்துஸ்பர்சரேகா ஸ்யாதித்துத்தம் மாதவாதிபி: “13”

வ்யாஸார்த்தக்ரீகோடிஜீவா பாஹுமௌர்வ்யாவி பாஜிதா”
வ்யுத்தக்ரமஸ்பர்ச (கோடிஸ்பர்சக) ரேகேதிகீர்த்திதம்மஜ்ஜுளாதிபி: “14”

த்ரிஜ்யாவர்க்க: கோடிமௌர்வ்யாபக்த்த: கர்ண இஹோச்யதே “-”
த்ரிஜ்யா வர்க்கஸ்து;

தோர்ஜ்யாப்த: பவேதுத்தக்ரமகர்ணக: (ஸ்யாத்கோடிஸ்பர்சகர்ணக:) “(15)”

குறிப்பு:— அந்த்யஜ்யா = நவதிஜ்யா = த்ரிபஜ்யா = த்ரிபமௌர்விகா
= விஷ்கம்பாத்தம் = வ்யாஸார்த்தம் = த்ரிஜ்யா என்பதன் வேருபேயர்கள்

மேற்கூறிய (15) பத்யங்களின் பொழிப்புறை:—

(பரிதி) வருத்தம் (வட்டம்) = 62832. ஆனால்; (அறை வியாஸம்)
(அறைவட்டம்) = 10000.

பரிதி 21600' ஆனால் வியாஸப் பாதி = $\frac{1}{2}$ வட்ட = 3438'.

$$\therefore 2 \pi = \frac{62832}{10000} = \frac{21600}{3438}$$

\therefore (முதல் பாகஜ்யா = (வருத்தஸய சத (100) பாகாட்ச: தண்டவத்ருச்சய தே து ஸ:]).

(என்கிற (லகதமகர்ஷி) வாக்பப்படி இந்த ஆதி ஸித்தாந்த கல்ப்பதரு முகத்தா

$$\text{ஹாப்படி க்கும்) = (ஜ்யா 1^\circ) \text{ ரு} = \left\{ \frac{62832}{360^\circ} \right\} = \left\{ \frac{21600}{360^\circ} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{175}{10000} \right\} = \left\{ \frac{60'}{3438} \right\} \therefore = \left\{ \frac{(62832)}{(360^\circ \times 10000)} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(21600)}{(360^\circ \times 3438)} \right\} \cdot \text{முறையே ஆகும்:}$$

இவ்விதமே முதல் பாகஜ்யா ஸாதனமாம்—இதற்கு மேல் பட்ட 2,° 3,° 4,° 5,° முதலிய பாகஜ்யா ஸாதனங்கட்கு பத்யப்படி ஏற்பட்டவைகளை பக்கம் (138)ல் காண்க

இப்படியேற்படுவதால் பின்பு வந்த நவீனர்கள் :—

ஓர் பாகைக்குறிய சாபத்தை அல்லது கோணத்தை (க°) என்றும், வேண்டிய ஜ்யா (சாரீய அல்லது கோணீய) பாகங்களின் முன் பாகங்களுக்குறிய எண்களின் இடத்தை (அ°) என்றுங்கொண்டபடியால் :— இவாச்சட்கும்:—

இவ்விடபாகங்களுடைய ஜ்யாஸாதனத்தின் பொருட்டு :—

இங்கு இவர்கள் த்ரிஜ்யாவையும் (1 = ஒன்று ஆக மதிப்பதனால்) :—

[ஜ்யா (அ + க)] = [2 கோஜ்யாக் + ஜ்யா அ — ஜ்யா (அ — க)].
என்றேற்பட்டது.

இச்சமீகரண கண்டங்களை ஒன்றிலொன்றை மாறி மாறி யோக வியோகங்கள் செய்து நல்லயுக்தியுடையவர்கள் கணிதங்களைக்கணக்கிட த்ரிகோண மிதிகட்கு வேண்டிய (ட்ரிக்குமெட்ரி தியரிகள்) ஸகலஸித்தாந்தங்களுமேற்படுகின்றன. (பரிதி பாகங்களுக்கும் ஸாதனஞ் செய்ய வேண்டி ஸூக்ஷ்மஜ்யாவிசுதவிதி முன்னுறையில் காண்க) :—

மற்றயவிவாணங்கள் வேண்டியபர்பந்தம் கூடுமானவறையிலும் இதன் முன் பின்ஸந்தர்ப்பங்களில் கூறியவற்றைக்கவனிக்குக :—இவ்விசுதங்களை ஏனின்கு கூற

வேண்டுமென்றால் ;—நவீனங்களின் எந்தவித மான கணிதங்களின் உற்பத்திக்கும். மகர்ஷிகள் காலத்திய ஸூத்ர பத்யருபங்களாயுள்ள கணிதமீதிகளே மூலாதாரம் என்பதைக்காண வேண்டியது யாவரும் என்ற நோக்கத்தால்:—

என்பது அவசியம் உணர்க:—

எதிலுமின்னும் பலவாறாக விகிதங்களிருந்தாலும் விழிவடையும்என்பதால் சிற்சில விசேஷங்களமைந்த கோட்டுக் கணிதங்களும் இவ்வளவுடனிற்கு முடிவடைந்தன.

வேறு :—

விருத்தம்

ஒரு பதினானூடே உத்திடுமீருபதுக்கே

வருநிலமென்ன வென்னில்

மருவிய ஒன்றுக் கோர்

வர்கவும் (கோராகவும்) வருத்து விரே—(46)–

என்பது

கிள் மேல் — யசு (16) ரு தென்மடல்—

உயி (20) ரு யெத்தனைஎன்னில்—

யசு (16) யும் — ய ($\frac{1}{16}$) ல் களிக்க — க (1)–

உயி (20) யும் — (ய) $\frac{1}{16}$ ல் களிக்க -- கவ (1 $\frac{1}{4}$)—

ஆகையால் — கவ ரு (க) (1 $\frac{1}{4}$ ரு 1) — (ப — ஜ.)

என்பது.

யெதுவுமிப்படிப்பார்த்துச் சொல்லவும்:—

வெண்பா:—

பாராய்கீழ்மேல் பனிரண்டே தென்மடலே

ஓராமல் (ல்) நிலமுக்காணியாம்:—

நேராக - வந்தநில முந்திரியாய் மாறுபதினாறிலே

தேரந்த முருகைக்கியந்து சரிகொல்:—

(47)—

என்பது:—

கீழ்மேல் - யெ (12) ரு த்தென்மடலறியாமல் நிலம் சுறு ($=\frac{3}{8}$) யானால் தென்ம(வ)டல் சொல்லுமீடும் வகை:—

முக்காணி (சுறு $=\frac{3}{8}$) நிலத்தையும் முந்திப்படுத்த - யெ (12) - இதை முந்தியிக்குழி - யசு (16) என்று - யசு (16) ல் மாறாகுயெ (12 \times 16 = 192); இதை ஒருகைகோல் - யெ (12) ருகிய ஈயவு - யசு (16) ஆதலால், தென்வடல் - யசு (16) என்பது:—

விருத்தம்:—

கட்டியோ ரெட்டு மாத்துக் காலறை முக்காலாகும்:—

செட்டியார் செத்துப் போனார் சிறுபிள்ளை மூன்றுபேரும்:—

வெட்டியும்(யோ) பகரொண்ணாது; விலையுமோ குறை யொண்ணாது:—

சட்டியாய்ப்பகராவல்லார் கணக்கர் கோடாலியாமே = (48)

என்பது:—

அ'இ - ச, அ'வ - உ, அ'த - சு = ஆ நிறை - டி உ. - = $(8 \times \frac{1}{2} = 4,$
 $8 \times \frac{1}{4} = 2, 8 \times \frac{3}{4} = 6) =$ ஆ நிறை - 12 -

இதை ந (3) ருக்குடுக்க ஈயவு - ச -

{ நவ து - ந து உவ - உ இ - ஆ சுட்டி (அ)
 $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - 3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4} - (2\frac{1}{2} -$ ஆ சுட்டி = (8) }

ரு நிறை ச - (4) உது $(2 \times \frac{3}{4})$ சுஇ $(1\frac{1}{2}) - 2$ வ $(2 \times \frac{1}{4}) = 2$ $(\frac{1}{2})$, உ (2) ஆ அ (8) ரு
 ச (4) ரு சனம் (சபம்) ந (3) ரு நிறை - டி உ (12) சரி:—

குளவெட்ட ளவுக்கு:—

விருத்தம்:—

செப்பிய கிள்மேல் முப்பத்திரண்டு, தென்மடலீரெட்டு—

ஒப்புடன் மட்டு முக்காலுக்குப் பணமுறைக்க. வேண்டில்—

தப்பிலாமட்டிலோரதை - தாக்கியோர் சுயைய (கையை) விசத்
 திப்படியாகச் செய்தே யிண்டையும் மாறிச் சொல்லே = (49)

என்பது:—

கிழ்மேல் - நடிஉ2(32)ரு தென்மடல் - டிசு (16)ரு மட்டு - து $(\frac{3}{4})$ ரு யெத்தனை
 யென்னில்:—

பெருக்காமல் குறுக்குத்தானம் பார்ப்பது :—

நடிஉ (32)ம் - ய $(\frac{1}{16})$ விசத்தில் (மாகாணியில்) எனிக்க - உ (2); டிசு (16) (ம்)
 யும் மட்டில் கழிக்க - டிஉ $(16 \times \frac{3}{4} = 12)$ இதை ரெண்டில் மாற -
 உயிச (24ஆதலால் ஷெ உயிச (24) என்பது.

ஆசிருவிருத்தம் :—

கைய(யொ)த்தபடியி லொருபத்து கொண்ட கோலினிற்

குள்மேநாலுமே - கனிவான - தென்மடல் ஒரு

னான்கு மட்டொன்று - கண்டபண மொன்றாகவே

மெய்த்தபிடி முன்னன்கு ருங்கோலதால் - விருப்பு

கிள்மேலாரதாய் வின்னய தென்மட லீரெட்டிதாய்

மட்டுமேயறை இதற்குவிலையை வைத்தலுறைசெயிற்

பிடியளவுதலைமாறி வாசுடனிரண்டு (கையும்)

கையும்மல் — ரவாதுதாக்கி — முன் து ஓசயி

விதமாத்தி யே மட்டினிலுரைக்கமுதலே

(நே) நெயுத்த கிள(கேள்)வியின் பிடியுமிப்படியு மே —

நேருங்கை மட்டுமே தான் — நீகண்டது கையை —

முன்னே விண்டதர்க்குதவி நீதிபென்றுரை செய்யவே — (50) —

என்பது —

யி (10) பிடிக்கோலால் கன்மேல் — ச (4)ரு தென்படல் ச (4)ரு — மட்டு — க

(1) ரு ப — க (1) — ஆ — மெ (12) பிடிக்கோலால் — கி கூ (6) ரு தென்

மடல் — மசு (16) ரு மட்டு — இ (½) ரு மட்டு பெத்தனையென்னில் :—

யி (10) ம் தனக்குமாற — ள — (100) — சருச — மாற — மசு

(4 × 4 = 16). யிதை முன்னிருத்தின — ள — (100) டனே (தாக்க) சூசுள

(16 × 100 = 1600) யிதை மட்டு (க = 1)ல் கழிக்க சூசுள

($\frac{1600}{1} = 1600$) என்று நிருத்தி — மெ (12) யுந்தன் னில் மாற — ராசமிச

(12 × 12 = 144) — மசுரு சருமாற கூயசு (16 × 6 = 96) யிதை

ராசமிச (144)ல் மாற — மசுசூசுருமசு = (96 × 144 = 13824) யிதை

மட்டு — இ (½) யில் களிக்க — கூசூசுளமெ

= (13824 × $\frac{1}{2}$ = $\frac{13824}{2}$ = 6912) — முன்பு — (பணம்) க (1)ல் மாற

— கூசூசுளமெ (6912) யிதை முன்னிருத்தின — சூசுள (1600) ரு கருடுக்க

யிய்வு — சுவடிகூவரி (= 4 + $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{64}$ + $\frac{1}{256}$ + $\frac{3}{6400}$

= 4 $\frac{2049}{6400}$ = 4 $\frac{1023}{3200}$ இம்மதப்படிக்க கிவ்விதமேற்படுன்றது — என்பது

[சூ (6912) = 4 $\frac{512}{1600}$ = 4 $\frac{5}{200}$ என்று வருகிறது. இதே சுத்தமென்பது

வெகுத்தெளிவு, இதற்குமதற்கு முள்ள வித்யாஸமோ = ($\frac{1023}{3200}$ — $\frac{1024}{3200}$)

= ($\frac{1}{3200}$) என்பதாகின்றது. நியத பின்னத்தையனு சரித்த படியால் என்ப

துணர்க :—

விருத்தம் :—

பதிகொண்டவூரில் பாதியு - (ம்) - மூன்றிலோர் பாவியமு

னாவிலொன்றும் பகறரிய —

வூரிலோர் கூறுடைய நால்வராம்.

பகுதி பொன்னீரு ராகுமே (2 × 6 = 12) விதிகொண்ட

படியிவை வகுத்திடி (ல்) மேன்மையாம்

வேண்டு பதினஞ்சு பொன்னே —

மேவியிடில் மூன்றுபொன் பிறவட்டமென்றிதனை-

வீராகவே தெறிந்தே - மதிகொண்ட

காணிக்கா ? சரிசெய்யும் (வகையினை)

வசையினை வருந்து வேனன் பாகவே;—

வரிசையுடன் வா வா குரு (வாகாகவரு) மந்தயீவில்:—

முன்வந்திடும் பொன்னை மாறியே:—

நிதி கொண்ட பதினஞ்சு பொன்தனக்:—

குதவியே நீதந்த பிடினன்குமே:—

நேசித்த பிரவட்டம் முன்வட்டம்:—

மிது சட்டம் நிற்செயற்றுறை (சிச்சயிற்றுறை) செய்கவே = (51) =

என்பது:—

(விபரம்:—)

ஊருக்கு பாதிக்காரன், ரு (3)ல் ஒரு காரன்-

சு (4)ல் ஒரு காரன் - சுல் (6)ல் ஆறில் ஒரு காரன்:—

ஆக சனம் - ச (4) ரு பொது விலுற்றயிறை

செ (பொதுப்பகுதி) - லெ (12) ப— (பொன்)

இதை அவரவர் ஈவு வீதமாக பிறிக்கில்

பாதிக் காரனுக்கு செ - சு — ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 6$ பொன்)

ருல் (3)ல் ஒரு காரனுக்கு - ச — ($12 \times \frac{1}{3} = 4$ பொன்)

சு (4)ல் ஒரு காரனுக்கு செ ரு — ($12 \times \frac{1}{4} = 3$ பொன்)

சு (6)ல் ஒரு காரனுக்கு செ ல — ($12 \times \frac{1}{6} = 2$ பொன்)

ஆக செ - லெ (15) (பொன்) யிதில் அதிகம் செ - ரு (3) பொன் ஆனபடியால் சரி சொல்லவ கை:—

பாதிக்கு வந்த செ - சு (6 பொன்னும்) பிரவட்டம் செ - லெ (12) யும் மாற - லெ (12 \times 6 = 72) - இதைக் கூடுதல் செ - லெ (15) ருக்

குடுக்க ஈயவு - ச ப— அ = ($\frac{72}{15} = 4\frac{12}{15}$, $\frac{12 \times 6}{15} = 4$ ப— 8

ஆதலால் பாதிக்காரனுக்கு செ ச ப—அ (4 ப—8); ருல் ஒரு காரனுக்கு - சம் (4ம்) - லெ (12)ம் மாற ச யி அ (48 = 12 \times 4) இதை - லெ (15) ருக் குடுக்க - ரு ப— ல (முன் போல் $\frac{48}{15} = 3$ ப— ல), ஆதலால் ரு ப— ல (3 ப—2) எனப்பது:—

சல் - சு - ரு ($\frac{1}{4}$ ரு) ரு (3)ம் - லெ (12)ம் மாற - ரு (36) இதை - லெ (15) ருக் குடுக்க செ - லெ (36 \times $\frac{1}{15} = 2$ ப—4) சுல் - சு - (காரனு) க்கு - லெ - லெ மாற - லெ (2 \times 12 = 24) யிதை - லெ (15) ருக் குடுக்க ஈயவு - லெ (16 ப— = $\frac{24 \times 10}{15} = \frac{240}{15} = 16$ ப—) ஆதலால் செ - சு ப— சு ($\frac{16}{10} = 1$ ப— 6) என்பன:—

இப்படி வரிவிதுவே தானமாகக் கண்டு சொல்லவும் — உள் வட்டமாக வத்தாலு மிதுவே தானமாகக் கண்டு சொல்லவும்.

செ பொன்—பணம்

செ 4 — 8

செ 3 — 2

செ 2 — 4

செ 1 — 6

செ 12 — 0

ஆக பகுதிப்பொன் 12ம் சரி. இங்கு பணம் பத்துக்குப் பொன் ஒன்றாகக் கொள்ளப்பட்டிருப்பதைக் கவனிக்க வேண்டியது:—

விருத்தம்:—

உத்த தோர்காதம் காதம் ஒரு படி யடி போல் வேடன்

நித்தலும்(மும்) நடத்தல் வேணும்' நேரு நறலைந்து (நாலேந்து) [காத(ம், அ)]

மத்தனை ரெட்டிசெய்தேயிது தனிலொன்று நீக்கி.

சத்தமாங்கண்டு ரேற்றினச்சுருக்கத்தைத் துணிந்து பாரேன் (52)

என்பது:—

ஒருபன்னி நாலொன்றுக்கு இருபதுகாதமோடும், அதை ஒரு வேடன்னொன் றுக்கு காதம்திகமாகப் படியடித்துகைபோலே துய்ந்தவன் எத்தனை னுளையில் பிடிப்பானென்னில்:—

பன்னி ஓடுகிரகாதம் — உய (20)ம் பட்டிக்க — சய [(40) = (20 × 2)] அதில் ஒன்று தள்ளி நீக்கு நயக = [(40 - 1) = (39)] ஆதலால் — 39 = (நயக) னுளையில் பிடிப்பானென்பது —

விருத்தம்:—

முப்பத்திரண்டு பணையைத்தெண்டு முனிந்தொருவன் —

சாணரி விரல் நாலேதானி (வ்) எப்பவது சென்றுய ருமென்று முன்னியன்ற முளந்தனை

சாணையேத் தியேதான்,

ஒப்பரிய சாண் விரல்தான் பனிரண்டாக

வுற்ற; துகையை மாரிந்த முயருமென்றே செப்பிய

தோரிருளுலேவர்க்கியத் தெண்டு

சேருளுளின்னதென்று செப்பலாமே (53)

[முடப்பனை] = நயஉ (32) முளம்; சாண் = சுச (64); [சாண் — க (1) ரு விரல் — உஉ (12)] ஆ ளாகுஉஅ = (64 × 12 = 768) யிதை சாணகய விரல் — உஉ (12) [தானந்த] விரல் — ச (4) நீக்கி — அரு (8க்கு)க்குடுக்க யிவு — கூயசு (7-8 = 96). ஆதலால்:—தொண்ணுத்தாறு [(96 = கூயசு) நானாயிலேறுமென்பது.

மாவிலை பிளவதாகும்: பிளவிடை குன்றியாகு
 மந்தேவுமாவ் குன்றிரண்டு சிரந்த மஞ்சாடியாகு
 மாவு மஞ்சாடி அஞ்சு மங்காலதுறாதும் கூடிற்
 கர (கா) வியம் கண்ணாய் சொன்னோம் களஞ்சென்ன களவாமே
 = (54). என்பது உ. —————

அணியெட்டு கொண்டது கதிகரெளு; கதிபெளு எட்டுக்கொண்டது தொத்துகள்
 தொத்துகள் — அக் கொண்டது பஞ்சட்டு — பஞ்சட்டு யெட்டு கொண்டது
 துண்டணல் — துண்மணலெட்டு கொண்டது நொன் மணல் — நொன்
 மணல் — அ — கொண்டது ஐய்வி — ஐய்வி அக் கொண்டது கடுகு — கடுகு
 எட்டு கொண்டது எள்ளு — எள்ளு-அ(8) கொண்டது நெல் — நெல் -அ-
 கொண்டது விரல் — விரல் மீஉ (பனிறண்டு) கொண்டது சாண் — சாண்
 உ (2) ரண்டு கொண்டது முளம் — முளம் ரெண்டு கொண்டது சிருகோல் —
 சிருகோல் — ச (4) நாலு கொண்டது செம்பியவள கன்றிருவுலகளந்த
 செம்பொற்கோலே (இது) அ (8)க் கோல் ஞா-(500=ஐந்தாறு) கொண்டது
 கூப்பிடு — கூப்பிடு — ச (4 = நாலு) கொண்டது காதம் — சிந்த வீதம்
 பாத்துக் கொள்ளவும்:—

வேறு:—

ஒருவர்த்தகன் மாணிக்கம் கொண்டு
 வந்து ருசாவைக் காண
 ருசாவும் மதிக்க மந்திரியிடத்தில் சொல்ல
 மந்திரிமார் — (ம=10) — பேரும்:—
 விலை சொன்னதற்கு வகை;—

- (1) முதல் மந்திரி யென்சம்பளத்தில் பாதியும் குறை ஒன்பதுபேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—
- (2) இரண்டாம் மந்திரி யென்சம்பளத்தில் முனிலொன்றுக்குறையொன்பது பேர் சம்பளமும் பெறுமென்றான்:—
- (3) ஈ (3)ம் மந்திரி யென் சம்பளத்தில் - ச (4)ல் க (1)ம் குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறுமென்றான்:—
- (4) ச(4)ம் மந்திரியென் சம்பளத்தில் (1)ம் னில் கம் குறையொன்பதுபேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—
- (5) ன (5)ம் மந்திரி யென்சம்பளத்தில் - கூ-ல் - கம் (1)ம் குறை ஒன்பதுபேர் சம்பளமும் பெறுமென்றான்:—
- (6) கூ (6)ம் மந்திரி என்சம்பளத்தில்-எல்-கம் (1)ம் மத்த ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—
- (7) எ (7)ம் மந்திரி என்சம்பளத்தில் - அ-ல் - கம் (1)ம் குறை யொன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—

- (8) அ (8)ம் மந்திரி என்சம்பளத்தில் ($\frac{1}{9}$)ம் கூல் - கம் குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—
- (9) கூ (9)ம் மந்திரியென் சம்பளத்தில் - டி - ல் க - ம் ($\frac{1}{10}$)ம் குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—
- (10) டி (10)ம் மந்திரி என் சம்பளத்தில் - டிக - ல் - க - ம் ($\frac{1}{11}$ ம்) குறை ஒன்பது பேர் சம்பளமும் பெறு மென்றான்:—

யிந்தவீதம் சம்பளம் விதிச்சுச் சொல்லவும்:—

[இக்கணிதகர்த்தா மேற்கூறிய கணிதத்துக்கு; மற்றவை கட்டுக்குப் போல் உதாஹரணம் விடைகணிக்காமல் வினாவோடு விட்டு விட்டார்:—

ஆகிலும் இவ்வினாவுக்கு உதாஹரண விவரணத்தினால் விடையளிக்கப் படுகிறது:—

இவ்வினா மிகப்பெரிய தாகையால் முதலில் சிரிய உதாஹரணங்காண்க:—

மேல் கணக்கில் மொத்தம் அடங்குவர்கள் 10 மந்திரிகள்:—

நாமிங்கு முதல் 3 மந்திரிகளை மாத்திரம் கொள்வோம் அப்போ:—

இங்கே தெரிய வேண்டியதற்கு = ?; என்று கெள்ள.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ? \quad \therefore ? = \text{என்ன வென்றால்:—}$$

இங்கு தெரிந்த எண்களாகிய - 2, 3, 4 இவைகளை ஒன்றுக்கொன்று பெருக்கவும். ஒன்றிலொன்று அடங்கு மெண்ணால் அவ்வடங்குமெண்ணை விட்டு மற்றவற்றைப் பெருக்கக் கணிதம் சுலப்பத்தில் முடியும்:—

$2 \times 3 \times 4 = 24$. இங்கு 4ல் 2 அடக்கமாகையால் ஷை 3×4 மாத்திரம் பெருக்கப்போதும் இதன் $= 3 \times 4 = 12$.

24 று பதில் 12 ஐயே உபயோகிக்கலாம். —

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \therefore$$

$$\text{ஷை } 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$12 \times \frac{1}{3} = 4$$

$$12 \times \frac{1}{4} = 3$$

$$\underline{\hspace{1cm}} = 13$$

இக் கூட்டுத்துகை (13) று 6, 4, 3 முதலியவையானால் ஹாசகமான (12) று உறிய வீதமென்ன வென்று தற்றை ருசிக்கப்படி கணிப்பதே மந்திரிகள் குடுக்குந் துகையாம்.

$$\begin{aligned} \frac{12}{13} \times 6 &= \left(\frac{72}{13}\right) = 5\frac{6}{13} \\ \frac{12}{13} \times 4 &= \left(\frac{48}{13}\right) = 3\frac{9}{13} \\ \frac{12}{13} \times 3 &= \left(\frac{36}{13}\right) = 2\frac{10}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(5\frac{6}{13} + 3\frac{9}{13} + 2\frac{10}{13}\right) &= 12 \\ (5 + 3 + 2 + \frac{6}{13} + \frac{9}{13} + \frac{10}{13}) &= (10 + 2) = 12, \end{aligned}$$

என்பதாம்:—

இவ்விதக் கணக்கு (142, 143, 144)ம் பக்கத்தில் (பிறவட்டம் உள் வட்டம்) என்கிற விகிதத்தில் போடப்பட்டிருக்கிறது. ஆகையால் கர்த்தாவால் உதகரிக்கப்படவில்லை. அதைவிட இந்தக்கணக்கு சில விஷயத்தில் மாறியிருப்பதால் விவரிக்கப் படுகின்றது.

இந்தக் கணக்குப்பிறவட்டத்தை யனுசரித்ததாகும்.

வர்த்தகன் கொண்டு வந்த மாணிக்கத்தின் விலை இன்னதென்று தெரியாத படியால், இப்படித் தெரியாத விலைத்துகைக்கு = (து) என்ற குறிப்பிடுவோம். விலைத்துகைக்குச் சமம் (து) ஆனால்:— மந்திரிமார் பத்துப்பேரும் கொடுக்கச் சம்மதித்த மாணிக்க விலைத்துகையோ கீழ்கண்ட வீதத்தில்:—

$$து = \left(\frac{து}{2} + \frac{து}{3} + \frac{து}{4} + \frac{து}{5} + \frac{து}{6} + \frac{து}{7} + \frac{து}{8} + \frac{து}{9} + \frac{து}{10} + \frac{து}{11} \right)$$

ஆகையால் (து = ?) என்ன வென்றால்:—

அதாவது மிகக்குறைந்த துகை என்ன:—

என்பது தான் பொருளின்கு.

ஷெ (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) இவைகளின் (அடக்கண் தவிர்த்த மிச்ச எண்களின்) பெருக்குத்து கைக்குச்சமம் = $(6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11)$ ரு = (332640) இதை இன்னுங்குறைச்சலாம்⁵ [(அ-பொ-ம) = (L. C. M.)] அளவைப்படிக்கு:—

$$\left. \begin{array}{l} 2 \overline{) 6,7,8,9,10,11} \\ 2 \overline{) 3,7,4,9,5,11} \\ 3,7,2,9,5,11 \end{array} \right\} \therefore \left\{ \begin{array}{l} (11 \times 5 \times 9 \times 2 \times 7 \times 3 \times 2 \times 2) \\ = (83160) \text{ என்றாகும்} \end{array} \right.$$

$(332640 : 83160) =$ படங்கு (4) வீதத்தில் குறைவதை இங்கு கவனித்தல்

வேண்டியதாம்:—

ஷெ துகைக்குரியபங்கைக் கண்டுபிடிக்க (83160) தான் முக்கியமான முதலாதாரமாகின்றது.

பின்பு:—

(மந்திரிகளின் சம்பளவிகிதம் தனித்தனித் தேரியவேண்டுமானால்:— இனி சொல்லும், வழியையே முக்கியமாகக் கொள்ள வேண்டியது):—

$$து \times (83160 \times \frac{1}{2}) = \left(83160 \times \frac{து}{2} \right) = (41580) து$$

$$து \times (83160 \times \frac{1}{3}) = (27720) து$$

$$து \times (83160 \times \frac{1}{4}) = (20790) து$$

$$\begin{aligned}
 (83160 \times \frac{1}{5} \text{ து}) &= (16632) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{6} \text{ து}) &= (13860) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{7} \text{ து}) &= (11880) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{8} \text{ து}) &= (10395) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{9} \text{ து}) &= (9240) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{10} \text{ து}) &= (8316) \text{ து} \\
 (83160 \times \frac{1}{11} \text{ து}) &= (7560) \text{ து}
 \end{aligned}$$

$$(\text{ஆகமொத்தமும்}) = (167973) \text{ து}$$

இங்கு புதிதாக ஏற்பட்ட எண்ணுக்கு = (167973) து; இதே ஹாசமாகும். மேலே வரிசையாய்க் கூடுமென்களாக வந்த (41580, 27720,) இதுமுதலியவைகளை $\left(\frac{83160}{167973} \right)$ இதனால் தற்செய்க முறைப்படிப் பெருக்கக்கிடப்பவைகளே:—

(சுலபகணிதத்துக்காக).

83160	(1)	167973	= (1)
166320	(2)	335946	= (2)
249480	(3)	503919	= (3)
332640	(4)	671892	= (4)
415800	(5)	839865	= (5)
498960	(6)	1007838	= (6)
582120	(7)	1175811	= (7)
665280	(8)	1343784	= (8)
748440	(9)	1511757	= (9)
831600	(10)	1679730	= (10)

$$41580 \times \frac{83160}{167973} = 20585 \frac{68595}{\text{ஹ}} \quad (1)$$

$$27720 \times \frac{83160}{167973} = 13723 \frac{101721}{\text{ஹ}} \quad (2)$$

$$20790 \times \frac{83160}{167973} = 10292 \frac{118284}{\text{ஹ}} \quad (3)$$

$$16632 \times \frac{83160}{167973} = 8234 \frac{27438}{\text{ஹ}} \quad (4)$$

$$13860 \times \frac{83160}{167973} = 6861 \frac{134847}{\text{ஹ}} \quad (5)$$

$$11880 \times \frac{83160}{167973} = 5881 \frac{91587}{\text{ஹ}} \quad (6)$$

$$10395 \times \frac{83160}{167973} = 5146 \frac{59142}{\text{ஹ}} \quad (7)$$

$$9240 \times \frac{83160}{167973} = 4574 \frac{89898}{\text{ஹ}} \quad (8)$$

$$8316 \times \frac{83160}{167973} = 4117 \frac{13719}{\text{ஹ}} \quad (9)$$

$$7560 \times \frac{83160}{167973} = 3742 \frac{134634}{\text{ஹ}} \quad (10)$$

1.	20585	(இவைகளின் மிச்சங்கள்)
2.	13723	68595 (1)
3.	10292	101721 (2)
4.	8234	118284 (3)
5.	6861	27438 (4)
6.	581	134847 (5)
7.	5146	91587 (6)
8.	4574	59142 (7)
9.	4117	89898 (8)
10.	3742	13719 (9)
		134634 (10)
=	83155	

839865 = பின்னங்களின் கூடல்.

$$[(839865) \div (\text{ஹரம்} = 167973)] = (839865 \times \frac{1}{167973})$$

$$= \dots 5$$

$$\text{முன்} = \frac{83155}{\text{ஹ}}$$

$$\text{ஆகமொத்தம்} = \frac{83160}{\text{ஹ}}$$

இவ்விதம் த்நைரூபிக உதவியின்றி கணிதமே உலகத்தில் இல்லை பொதுவாக.
ஆதலால் மாணிக்கத்துக்காக விலைக்கு

$$\text{முதல் மந்திரி கொடுத்ததுகை} = 20585 \left(\frac{68595}{\text{ஹ}} \right)$$

$$2 \text{ ம்} \quad \text{செ} = 13723 \left(\frac{101721}{\text{ஹ}} \right)$$

$$3 \text{ ம்} \quad \text{செ} = 10292 \left(\frac{118284}{\text{ஹ}} \right)$$

4 ம்	செ	=	8234	$\left(\frac{27438}{\text{ஹ}}\right)$
5 ம்	செ	=	6861	$\left(\frac{134847}{\text{ஹ}}\right)$
6 ம்	செ	=	5881	$\left(\frac{91587}{\text{ஹ}}\right)$
7 ம்	செ	=	5146	$\left(\frac{59142}{\text{ஹ}}\right)$
8 ம்	செ	=	4574	$\left(\frac{89898}{\text{ஹ}}\right)$
9 ம்	செ	=	4117	$\left(\frac{13719}{\text{ஹ}}\right)$
10 ம்	செ	=	3742	$\left(\frac{134634}{\text{ஹ}}\right)$

$$\left\{ \left(\text{ஆ மாணிக்கத்துக்காக வர்த்தக} \right) \left(\text{ஹக்குக் கொடுத்தத்தகை} \right) \right\} = 83160 = (\text{து})$$

இதனால் அந்த மந்திரிமார்கள் சம்பளத் துகையையும் திறைசூசி க்கணித விகிதப்படி கட்டமாசத்தெரிந்துக் கொள்ளலாம் :—

என்பது:—

வேறு:—

ந (3) ள - க (1) உரி - (ய = 10)ந் தாந்தில் யெ (12) அடிக்கோலால் - குழி ஈ - ரு (100-க்கு) ள (7) உரிக்காலால் செ - அயச (84) ள ஆ அ (8)ந் தறத்தில் - யச (16) அடிக்கோலால் குழி கூய (90) ரு - கூ (6) அடிக்காலால் கோலால் நெல்பெய்வள வென்று கேட்டால்:—

சொல்லவகை:—

— யெ (12) டியுந்தன்னால் மாரி - ஈ (100)ல் பெருக்கி, பெருக்கினதுகையை யெட்டில் பெருக்கியிதனை சுடசி - கூ - (6)ல் பெருக்கி நிருத்திக் கொண்டு முத்துகையும் ள (7) யும் பெருக்கி நெல் அயச (84) ள - ல் பெருக்கி யிதனை - யச (16) யுந்தன்னில் மாறின துகையுடனே பெருக்கி யிதனை குழி கூய (90)ல் பெருக்கி முன்னிருத்தினதற்குக் குடுத்துக் கண்ட ஈவையித்தனை யென்று சொல்லவும்:—

அயங்கோணம் போன்ற நீலமளக்கும் வகையடிவது:—

வட்டத்தினளவு (வட்டத்தளவு) அளந்து அறைக்காலில் களித்து குருங்கோலுடனே பெருக்கி — ய $\left(\frac{1}{16}\right)$ யில் களித்து நின்றதை முந்தியி $\left(\frac{1}{32}\right)$ ல் களித்து நிலம் சொல்லவும்.

— டி - (10) தாத்தில் — அஞ்சமா-நிலம் உளுவன் டு (5) உரிக்காலால் ஷெ
சலி (40) பத்தாம் எ வருசைபனந்தால் அ (8) எட்டாந்தாத்தில் — ஆருமா
நிலம் உளுவான் எ (7) உரிக்காலால் நெல் பெவ்வளவு அளப்பானென்று
கேட்டால் அதற்கு வகை:—

டு (5) ப—மாவும்-அ (8)ம் பெருக்கி எ (7) உறியிலும் பெருக்கி வைத்து-முத்து
கைமுதல் மற்றனனு வகையும் பெருக்கி முன்னிருத்தினதற் குடுத்துக்
கண்டபிவை யித்தனை நெல்லென்பது:—

வேறு:—

யிலங்கை-எா (700) காதம்-எறும்புத்தாறை விட்டால்-அதில் ஒரு விறற்கடைக்கு
எா (700) எரும்பு துகையாக-எா (700) காதவளிக்கு பெரும்புத்துகை
பெவ்வளவென்றால் சொல்லும் வகை:—

(இது சொல்வது:— முன்தூர அளவைப்படி சலபமாகையினால் காத்தா
இதற்கு உதகரிக்கவில்லை என்பது.)

வேறு:—

கல்லளவு:—

உலி (20) முள நீளத்தில் — உலி (20) முள அகலத்தில் — சலி (40) சாண் கனத்து
க்கல்லி — உலி (20) முள நீளத்தில் டி (10) முள அகலத்தில் — ச (4) சாண்
(கனத்தில்) கல்லு முறிக்க வேணுமென்றால்:—

வகை — உலி ரு உலி ருமாற :சா (= $20 \times 20 = 400$) யிதைக் கனமான — சலி
(40)ல் மாற — டிசுசு (= $400 \times 40 = 16000$) யித்தை சிறுத்தி உலி (20)
முளத்துக்கும் — டி (10) முளத்துக்கும் மாற — உா ($20 \times 10 = 200$)
இதைக் கனமாகிய (வேண்டிய கனமாகிய சாண்) ச (4)ல் மாற —
அாரு = ($200 \times 4 = 800$) — [யிதை] இதனால் முன்னிறுத்தின —
டிசுசுரு (16000) (ஐ)யியய்வு-உலி = ($\frac{16000}{800} = 20$)
ஆதலால் (கல்) உலி (20) முறிக்கலா மென்பது:—

சு (1000) முள அகலத்தில் — சு (1000) முள நீளத்தில்:— சு (1000) முள
கனத்தில் ஒரு கணு (என்றால் குன்று)—இதை ஒருமுள நீளத்தில் ஒருமுள
அகலத்தில் ஒரு முள கனத்தில் ($1 \times 1 \times 1$) ஒரு (ஒவ்வொரு) கல்லாக
முறித்தால் யெத்தனை கல் முறிக்கலா மென்றால்:—

சு ரு சு: யாசு (= $1000 \times 1000 = 1000000$):— (பத்து நூறுயிறத்துக்கு
ஆயிரம் யாசு ரு சு = ஈ கோடி ரு = ($1000000 \times 1000 = 1000000000$)
நூறுக் கோடி — நிற்க:—

கரு. கரு: க; யிதை-க-ல் மாற-க = ($1 \times 1 \times 1 = 1$) யிதுக்கு முன்னிருத்தின
— ஈ கோடி (நூறு கோடி) [க்கு]—(ஐ)க்குடுத்த யிய்வு-ஈ கோடி—ஆதலால்:—
ஈ கோடி (100 கோடிக் கல்) முறிக்கலா மென்பது:—

வேறு:—

பலகையளவு:—

—யி-(10) முள நீளத்தில் ௨ (2) முள அகலத்தில்-அ (8) விரல் கனத்தில் பலகை (க) ரு (1க்கு) பணம் ௬ (6) ஆ-ரு (5) முள நீளத்தில்-க (1) முள அகலத்தில்-நாலு (4)-ச-விறல் கனத்தில்-பலகை-க (1) ரு பணம் எத்தனை பென்னில்:—

முன்னிறை-யி (10) ரு ௨ (2) ரு மாற $(10 \times 2 = 20)$ உயி-யிறையெட்டில் மாற ஈசுயி $(20 \times 8 = 160)$; யிறை நிறுத்தி — பின்னிறை-ரு ரு-ச ரு மாற உயி $(5 \times 4 = 20)$ யிறை பணமாகிய-(6ல்) ஆயில் மாற உயி (120)-இறை முன்னிறுத்தின ஈசுயி (160) ருக் குடுக்காயிவு- $\frac{160}{120} = \frac{4}{3}$ ஆதலால் [பணம் முக்கால்] என்பது.—

மற்றும் வந்தன வெல்லாமிப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்:—

பணம்-க-ரு தூணி - ருயி ஆ-ரு ௧௨ ரு பணத்து ரு யெத்தனை யென்றாலும் = பணம் - க-ரு த (தூணி) ஆ-ரு உயிச ரு நெல்லெத்தனை யென்றாலும் = பணம்-க-ரு படி ருயி ஆ-ரு ௩யி படி யெத்தனை யென்றாலும்- பணம்-க-ரு சேற்-ச-வ-ஆ-ரு ப — உ-ருசேற்யெத்தனை என்றாலும் = ப — க-ரு பலம்-க-வ-ஆ-ரு-அ-ரு-பலம் யெத்தனை யென்றாலும் = ப — க-ரு காய்- ருஇ-ஆ-ரு ப — வ-ரு காய் யெத்தனை யென்றாலும்-இப்படிப்பட்டப் பலப்பலக் கொள் முதல் கணக்குக் கொள்முதல் (கொள்முதலெனத்தீர்க்கமாய் ஆராய்ந்து) விவிலைக்கும் ப — (பணத்து)க்கும் மாறிச் சொல்வது.

வேறு:—

௩யி (30) னாள்-௩யி (30) பேர் சேவித்தானுக்கு-யி பணம் (10 பணம்)ஆ-ரு ௧௫ (15) னாள் ௧௫ (15) பேர் சேவித்தானுக்கு (பணம்) யென்னவென்றால்:—

சொல்லவகை:—

உயி ரு ௩யி ரு மாற : கூற = $(30 \times 30 = 900)$ யிறை நிறுத்திக் கடசியாகிய- ௧௫-ரு ௧௫-ரு மாற-உயி ௧௫ $(15 \times 15 = 225)$ யிது வுடனே- நடுவாகிய ௧௨ யி ப — (10 ப —) ஆவது- $(10 \times 10 = 100)$ ல் மாற - உயிஉரு $= [(100 \times 225) = (22500)]$ யிறை முன்னிறுத்தின - கூற (900) ருக் குடுக்காயிவு உயி ௧௫ (௨ ப — ௧௫). $(25 - 2$ பணம் 5) என்பது:—

ரெண்ணொண் மட்டில் குளி-௩ (3) ரு முணுசொண் மட்டில் குழி யெத்தனை யெஸ் ருல்:—

மதல்-௨ (2) ரு ௩யி-௩ (3) ருமமாற-௬ (6) யிறைக்கடசி-௩ (3) ருக் குடுக்காயிவு- ௨ (2) ஆதலால் (2) (குழி) ரண்டு யென்பது:—

யி (20) னாள்-௩யி (30) பேருக்குச் சம்பளம் அ (8) யீர் (மாத்தில்) யி (10) விறு கன் பொன்னுநால் பதனைஞ்சு-(௧௫) (15) னாள்-சயி (40) பேர் சேவித்தானுக்கு எ (7) யீர் (மாத்தில்) யெத்தனை விறுகன் பெருவாரென்னில்:—

சொல்லவகை:—

கடசி மாத்து (எ = 7)ம் டி (10)ம் மாற எயி (10 × 7 = 70) இதுவுடனே ஆரா வது சொன்ன-சயி (40)ல் மாற உச்சு ஆரா (40 × 70 = 2800) இதுவுடனே அஞ்சாவது:யிடு (15) வுடனே மாற-சயி உச்சு (2800 × 15 = 42000) என்று நிருத்தி:—

முதலாவது சொன்ன இருவதும், ரெண்டாவது சொன்ன டயி (30)ம் மாற-சுரா (30 × 20 = 600)-ஈவது சொன்ன பெட்டில் மாற-சுச்சு ஆரா (600 × 8 = 4800) இதற்கு அதைக்குடுக்க ($\frac{42000}{4800}$).
யீய்வு = ($\frac{42000}{4800}$) = ($\frac{420}{48}$ = $\frac{70}{8}$ = $6\frac{6}{8}$ = $6\frac{3}{4}$) ஆதலால் எட்டே முக்கால் (அது) (விராகன்) என்பதாம்:—

யி (10) - வயதில்—அ (8) கூத்தாடி - சு (6) வாகை கொள்வானுக்கு - எ (7) யில் - டி (10) விராகனை - டி (5) வயதில் - ச (4) கூத்தாடி டி (3) வாகை கொள்வானுக்கு - ச (4) மாத்தில் யெத்தனைவிராக வென்னில்:—

சொல்லும் வகை:—

யி — (10)ம் - உ வது சொன்ன(அ)யெட்டிம் டி வது சொன்ன-சு (6)ம்-ச வது சொன்ன -எ-(7)ம் கூடக் கூட்டின = (31) டிக-யிதை நிருத்தி கடசியாகிய - டி - ச - டி - ச (5 + 4 + 3 + 4) = ஆ 16 (யி) - நடுவாகிய - யி (10)ம் மாறாகிய = (160 = 16 × 10) இதை முன்னிருத்தின டிக - (31) ருக் குடுக்க. யீய்வு - டிவது = (5 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{8}$) அஞ்சேரிக்காலே முக்காணி (சமாரில்); ($\frac{160}{31}$ = $5\frac{5}{31}$ என்பது வெகுசந்தமாம்) ஆதலால் டிவது விராகவென்பது:—

வேறு.—

அ (8) முள உசறத்தில் - யி (10) முள நீளத்தில் ச (4) சாண் கொம்பில் - சு (6) முளத்துதிக்கையில் ஆனைக்கு-யி (10) யீ-விராகன் டி (50) ஆ - ச (4) முள உசறத்தில் - சு (6) முள நீளத்தில் - உ (2) சாண் கொம்பில் - டி (3) முளத்துதிக்கையில் ஆனை - க - (1) ரு விலை யெத்தனை யென்றால்:—

சொல்ல வகை:—

முதலாகிய-அ யி-ச-சு = (8 + 10 + 4 + 6) = ஆ - உயி (28) யிதை நடு வாகிய விராகன் டி (50)ல் மாற-சுச்சு (28 × 50 = 1400) - கடசியாகிய (4 + 2 + 6 + 3 = 15.) இதை டி (50)ல் மாற ளாரு (750) நடுவாகிய - யி (10) [அம்] மாற-எச்சு (7500) இதை முன்னிருத்தின சூசா (1400) க்குக் குடுக்க ஈய்வு ($\frac{7500}{1400}$ = $\frac{75}{14}$ = $5\frac{5}{14}$) என்பது:—

யி (16) டிக்கோலால் ஓர்மா நிலம்-(ப-மா = $\frac{1}{2}$) ரு ரெ (கடமை) சயி (40ப—) ஆ யி (12) டிக்கோலால். நிலம்-ப-ரு-கடமை யெத்தனை யென்றால்:—

யி (12)யும்-யி (16) ருக்குடுக்க யீவு ($\frac{12}{16}$ = $\frac{3}{4}$) = (ஊ)-யிதைத் தன்னில் மாற-இய = ($\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$) × ($\frac{9}{16}$) இதைக் கடமையாகிய - சயி (40)ல் பெருக்க - உயி இ (= $\frac{9}{16} \times 40$ = $\frac{360}{16}$ = $22\frac{1}{2}$). ஆதலால்-உயி இ-என்பது:—

சு (6) உறிக்காலால்-ஈ (100) ன்று (நூறு கலத்துக்கு) அ (8) உறிக்காலால்
யெத்தனை யென்றால்:—

முதலும் நடுவும் பெருக்கக் கடசிக்குக் குடுக்கிறதுக்கு வகை:—

சு (6) ஈ (100) பெருக்க - சுஈ (6 × 100 = 600) கடசிபாகிப - அ (8) க்குக்
குடுக்க எய்து - ஈ = $\left[\left(\frac{100 \times 6}{8} = \frac{600}{8} = 75 \text{ கலம்} \right) \right]$ இதுக்குக்
குறுக்குத்தனம் (எவ்விதமென்றால்):—

சு.ம் ஐ; ஈ.ம். எய்து (6ம் $\frac{3}{4}$, 100ம் 75; அதாவது 8 று 6 = $\frac{3}{4}$, இந்த $\frac{3}{4}$ லால்
100 ஐப் பெருக்க:—

$(100 \times \frac{3}{4}) = 75$ -ஈ- எழுபத்தைந்து கல மெண்டது யின்னம் ஒருவகை:—

அஉ (8 உரி) க்காலால் -ஈ (100) கலமும் சு (6) உக்காலால் நெல் யெத்தனை
யென்னில்:—

அ (8)ம் (100) ஈ-ம் பெருக்கிக்கடசி -சு (6) றுக் குக்குடுக்க எய்வு
= $\left(\frac{100 \times 8}{6} = \frac{800}{6} = 133 \frac{1}{3} \text{ ஈ} \right) = \text{நாநடுந.}$ போக நீல று -உ (2)

று -சு (6)ல் ந (3)ல் பிரித்தால். உ (2) ஆனால் -க (1) ன று ந (3)ல்-க-(1)று
பிரித்தால் - த (நூணி) ஆ லைத்து -கஉ (6உரி) க்காலுக்கு யெத்தனை
யென்னில் ஆ [நாநடுந.ள.த.] இங்கு (த = நூணி = (4) ச மரக்கால்)
யென்பது:—

எ (7) உறிக்காலால் -ஈ = (100 கலம்), அ (8) உறிக்காலுக் கெத்தனை
யென்னில்:—

எறு ஈறு மாற - ஈஈ- யிதை அ-று (குக் குக்குடுக்க) யீய யீயவு
 $\left(= \frac{7 \times 100}{8} = \frac{700}{8} = 87 \frac{1}{2} = 87 \frac{1}{2} \text{ ஈ} \right)$ அயெஇள ஷெ அயெ- ஈ
தறு (த = நூணி, று = பதக்கு) ந உறி, யென்பது:—

இதுக்குச் சு(ரு)க்கம்:—

முதலும் நடுவும் பெருக்கிக் கடசிக்கு எய்ந்து சொல்லுகிற தானம் சரிவே. —

கடைசியில்-அ(8) உறிக்காலென்று வந்தால் முதலும் நடுவும் மாறிக்கண்டதுகைப
அறைச்சாலில் களித்துக் கண்ட துகையை - [க(1ல்) ஒன்றில் கழித்து நெல்
சொல்லவும்:—

(ப— க (1) (று.) = பணம் ஒன்றுக்கு ஷெ 1நெல்) [ந - ந உய்] (முக்குயணி
முன்று உறி) ஆ -நடுசு ப— (36) பணத்துக்கு நெல் யெத்தனை யென்னில்
யீதுக்குச் சுருக்குத் தானம்:—

க (1) ள மரக்கால் - யெ (12); அதாவது ஓர் கலத்துக்குரிய மரக்கால் பண்ணிரடி (ஆகையாலே) பணமாகிய மூப்பத்தாறு—ரூப் பொன்னும் கூடாய் (36 × 10 = 360) யெ (12) ரூ கூடாய் (360) மீய யீய்வு = கூடி (30) ஆயிரந்த மூப்பதும் - யெ - ருக்குறிக்க கூ (3) ஆக்கிக்கொள்ள. நி. கூ உறி (முக்குறுணி மூன்று உறி) ஆவது கூவபு மரற - யெ (10½) யிறைக்கனப் படுத்த - கூவ (101½) ஆனால் - கூக-ள - (நி)க (101 கலம்-ஒரு முக்குறுணி) என்பது:—

கீழ் வாயிலக்கங்கேட்டதற்கு வகை:—

த ரு து யெத்தனை என்றால் - து லும் நாலுபங்கு வச்ச ஒரு பங்கு தள்ளி மூணுபங்கும்-இய - ஆதலால் து ரு து: இய ($\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$) அறையே வீசு பென்பதாம்:—

இ ரு இ ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$) என்னவென்றால்:—

பெவதி பண்ணி - வ ஆவதால் இ ரு இ: வ ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$) என்பது:—

வ ரு வ ($\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = ?$) யெத்தனை யென்றால்:—

வ = $\frac{1}{4}$ ன் ச (4)ல் க (1) ரு = ய ($\frac{1}{16}$) ஆனபடியினாலே வ ரு வ: ய ($\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$) வீசம் என்பது:—

கவ (=) கலவாய், த (துணி) வாயி; ப (படி) வாப், (செ கீழ்வாயி) யிர்த நாலு வாயிலே யெது தூண்டிக் கேட்டாலும், கேட்டவகை சொல்லவும்.

கள (கலம் 1க்கு) ரு து (முக்கா) யெத்தனை யென்னில்:—

கன (1 ள) த்துப்படி - கூடி (90) யிர்த - கூடி - ம் முக்கா (து) லில் கழிக்க - கூடிஎதி ($90 \times \frac{3}{4} = 67\frac{1}{2}$) ஆயி-நாளி (ழி) யில் கழிக்க - ஹுபஉ உரி - ஆன படியினாலே—க து ஹு பஉ உரி யென்பது.

த ரு ஹு யென்ன வென்றால்:—

த - ரு படி - கூடி; கூடி-பூ கூ து; ஆனபடியினாலே—தருபூ - கூ உறி கூ து யென்பது:—

ப ரு வ யெத்தனை யென்னில்:—

ப. ரு. படி. கூ, கூவ - கஇ; ஆதலால்-ப. ரு. வ. (கஇ)உ-உரி யென்பது— உ (ரு) து யெத்தனை யென்றால்:— உ ரு - சவடு—சயி-து: கூடி.யிதனை. பூல் களிக்க:—கூ து - ஆதலால்—உறி (ரு) து: கூ து:—

வேறு:—

க ய (1 × $\frac{1}{16}$) முதல் கூடி (90) வறைக்கு மெத்தனை யென்னில்:—

கூடி (90) ரு இனம் - கூ (9) யிதுடனே - க - கூட்ட யி = (9 + 1 = 10) — இதில் பாதி—ரு; அஞ்சும் - கூ - ம் மாற = சயரு ($9 \times 5 = 45$) — சயரு (45) — சளருயி (450) - சசுருள (4500) - ஆ சசுருளகூடிரு ($4500 + 450 + 45 = 4995$) கூ. ரு. (இனம்—கூடி = 900) ஐ களிக்க - கூடி—போக-நீவ ரு-சசுருளரு ($4995 - 900 = 4095$) இதைப் பிறந்த ய ($\frac{1}{16}$) வாயில் களிக்க - உளருயிருதரு ($\frac{4095}{16}$)

$$= 255 \frac{1}{16} = 255 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} \text{ என்பது:—}$$

குழி க. ரு (குழி 1க்கு) ௫ உரி று (5௨ உரி கவடு) ஆட (சு) நிலத்துக்கு நெல்
பெத்தனைபென்னில் :

[குறிப்பு:— குழி என்பதின் = $(12 \times 12 = 144$ சதுர அடி
கொண்டது); (சு = $\frac{1}{16}$) என்பது அறைமா நிலம்:]

(சொல்ல) வகையாகப் பார்க்குதது:—

(௫ உரி று) ஆவது (௫இழு) என்று வைத்து - (மீ = மர) - நிலத்துக் - ப (மா) குழி
(குழி) உாடுமசு (256) ஆக-சு ($\frac{1}{2}$ மா) ரு குழி ஈஉறியு (128) யிதை ௫இழு
($5\frac{5}{8}$) லுடனே மாற ($128 \times \frac{4}{5} = 720$) ளாஉறியிதை-உறி வாயில் களிக்க :-
செ அள (8 ள) எட்டுக்கலம்:—

யிதுக்குச் சுருக்குத்தானம்:—

௫ உரி று யு (ம்) ($5\frac{5}{8}$) = ௫இழு - (சு) வில்பாதி காணி ($\frac{1}{8}$) காணி (சு = 1) - ரு)
முந்திர்ப்படுத்த ச ($4 = \frac{1}{8} \times 320 = 3\frac{2}{5} = 4 \therefore$) ஆக்கிக்கொண்டு
(௫இழு) லுடனேமாற உறியு ($22\frac{1}{2}$) யும் - த - வாயில் களிக்க - ளா (7ள)
எ மீ (7 மரக்கா) ஈ உறிமாயு [அ (8)] எட்டுமரக்கால் கூடக் கூட்டி 8 (அ)
அள (8 காலம்) என்பது :

குழி க ரு நெல் ச உறி - ஆட நில - ப - ரு நெல் பெத்தனையென்னில்:—

ச (4) (மா) உரியாவது - ச இ ($4\frac{1}{2}$) என்று நிகுத்தி — ப-வில் பாதி-ச - ரு - று -
அ (8) ம் ச இ ($4\frac{1}{2}$) யும் மாற-நடுசு (36) ம் த-தூணி-வாயில் களிக்க-ளா - அ-ம்
(கலம் - 8ம்) - ப- வாயில் களிக்க செ யு (12) ளா - இதனுடனே - ச - ரு -
த - று கூட்டிக்கொள்ள - செ யு (12) ளா ; த று கூட்டிக்கொள்ள —
யு-ள-த-ரு) = 12 கலமும் தூணியும், பதக்கும் (என்று) இப்படிப்பார்த்
து க்கொள்ளவும்:—

குழி-சு ரு செ ப ஆட செ யள (கல = 10) ரு செ பெத்தனையென்றால் :-
குழியாவது - வழு ($\frac{3}{8}$); இதனுடனே யள - மாவது (10 - ம்) மாற ($\frac{3}{8} \times 10$)
= $3\frac{3}{4}$ = நூ-இதனை சு. (6) ருக்குக்கே நயவு - இழு ($3\frac{3}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$) —
ப ($\frac{1}{8}$) வாயில் களிக்க ($\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$) = சு - லி - என்பது:—

மீ (மா) நிலம் - ப; ப—ரு செ யள (10 கலம்) ஆட குழி - அ - ரு நெல்
பெத்தனை யென்றால்:—

குழி - ச - ரு - வழு - நெல் (இதை) பதிங்கலமான - யி (10'ல் மாற - நூ
($3\frac{3}{4}$) யிதை அ (8) டனே (யும்) மாற - நடு (30) - யிதை (உறி) வாயில்
களிக்க செ - த:—

யிது தன்னிலும் விகடமாகச் சொல்லவந்தால்:—

வழு ($\frac{3}{5}$) ஆவது - ப ௪ (மகாணி = $\frac{1}{16}$); ப ௪ யும் ($\frac{1}{16}$ வையும்) சு (1) வழு ($\frac{3}{5}$) யும் (6) சு - ஆ வைத்துக்கொண்டு ஷெ சு (6) உறி ஆலைப் - யும் ($\frac{1}{16}$), இஉறி ($\frac{1}{2}$ உறி), ரு ய ($\frac{1}{16}$) யிப்படிப் பார்த்துக் கொண்டு பார்க்குற கணக்கு முண்டு:—

யிது விரித்துக்காட்டல்:—

ஸ் (மா) நிலம் - ப - ரு - ஷெ ருள - தரு உறி ஆ (கலம் = 5; த = 5, உறி நாழி ஆ (குழி) அ (8) ரு ஷெ யெத்தனை யென்னில்:—

ருள (5 கலம்) ரு (5) சு (6) பாற நடு (30) ரு (5) ரு - இ ($\frac{1}{16}$) = உஇ ($2\frac{1}{2}$), னுளிக்ரு - ய ($\frac{1}{16}$) ஆ ரு - ப: வய ($\frac{1}{16} \times 5 = \frac{5}{16}$) ஆ நடுஉன ய ($32\frac{1}{16}$) யிறைத்துளியாகிய - அ (8) உடனே மாற - உளசுருஉஇ ($32\frac{1}{16} \times 8 = 262\frac{1}{2}$) இதைக் குறுணிராயில் களிக்க. —

மிநசு (13 + $\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{16}$ = $13\frac{1}{8}$) இதை னுளியில் கழிக்க னு உறி னு, அதலால், = னு உறி - னு - யென்பது:—

குழி - வழு - என்று வந்தால். —

ப. (மா) - நிலம் - உருயிசு (மாநிலம் 256) ஆனபடியினாலே - கல்மாவது - கயிசு

(96) படியாகையாலே - இதை - உருயிசு (256) ருக்கிய நயவு ($\frac{96}{256}$ = $\frac{3}{8}$) = $\frac{3 \times 32}{8 \times 32} = \frac{3}{8}$) யென்பது:—

ஆனபடியினாலே - குழி வழு (காலேரிக்கால்) ஆச்சுது:—

குறிப்பு:—

யெந்தக்கணக்குச் சொன்னாலும் இப்படித்தானம் கண்டு பார்த்துச் சொல்லவும் - யிதுவும் - சு (9) (சு = 1) எடுத்துக்கு மேல்வந்தாலும் - சில்வானங் கூட்டி விகடமாக வந்தாலும். —

அதுக்கு - களரு (1 கலத்துக்கு) சு (6) ஆகவும்:—

னுளிக்ரு - ய ($\frac{1}{16}$) யிர்த்தப்படி வைத்துப் பார்த்துக் கொள்ளவும்:—

(வேறு):—

பன்னிடை அன (8 $\frac{1}{2}$) கொண்டது விராகனென்றும் - விராகன் - உயி (20) கொண்டது - பல்பென்றும் - (விராகன்) உயிசு (24) கொண்டது - தாருபல பென்றும் - தாருபலம் - உயி (20) கொண்டது வீசையென்றும் - வீசை ரு (5) கொண்டது துலாம் - என்றும் - யிதுவல்லாமல்:—

பலர் ச (4) கொண்டது சேர் என்றும் - சேர் - சயி (40) கொண்டது மனு என்றும் இப்பதுற திருவி. தேசத்திலே நடந்து வருகிறது - அவ்வளவும் தேச பாசை (தேசபாசை) யாக நடக்கும்:—

வெள்ளிக்கும் - ரெற்றினத்துக்கும் (— ரத்தினத்துக்கும்) விகற்பம் வருமாறு:—

விளக்கம்:—

பணவிடை அஞ் (8 $\frac{3}{4}$) கொண்டது வெங்கட்டாபன்வில்லிட்ட கூ- யென்றும்:—
 பணவிடை - ௨௨ (12) கொண்டது - களஞ்சு யென்றும்:—
 களஞ்சு - க (1) க்து - மஞ்சாடி - ௨௨ (20) என்று மாவுபென்றும் ஆதகயால்:—

மஞ்சாடியும் மாவுஞ்சரி:—

நரு மாவுக்குச் சிறுமா - ௩ (மும்மா) என்று சொல்லுவது:—

பு(1 $\frac{1}{8}$ = மாகாணிக்கு) ரு. மஞ்சாடி - கவ - (1 $\frac{1}{4}$) என்றும் - ப. ரு (1 $\frac{1}{8}$ ரு =
 மாவுக்கு) சிறுமா - ௨ (10) மாயென்றும், [ச = சு] = 1 $\frac{1}{8}$ ரு மஞ்சாடி
 ன் (1 $\frac{1}{8}$) சிறுமா - சு (6) மாப்பொன்னென்றும் (1 $\frac{1}{2}$ =) சி = ௩ - குன்
 றிப் பொன்னென்றும் ௨ ௨ = (1 $\frac{1}{8}$) ரு ப (ப) மாபிளவு யென்றும் ௨
 ௩ = (1 $\frac{1}{8}$) ரு சிறு மா - ப வீராகன் யென்றும்:—

சிறுமா - ஈசு (160) கொண்டது களஞ்சு யென்றும் - வி.ய வீராகன் — ௨ =
 (10) கொண்ட தென்றது:—

பணவிடை - க - (1) ரு - மஞ்சாடி - கஜி (1 \times 1 $\frac{1}{2}$ \times 1 $\frac{1}{8}$ = 1 $\frac{3}{8}$) - யென்றும்
 பவளத்துக்குச் களஞ்சு மேல் விலையாகவும் - வெள்ளிக்கு - ௨௨ (12 $\frac{1}{2}$ -
 பணவிடை காசு-என்றும்-துலாம். ௨௨ (20) பாரமென்றும்:—

காட்டப்பாக்கு - ௨௨ (20000) இருபதாயிறம் - கொண்டது - க அவன
 மென்றும்:—

பரிமளக்குங்கு மப்பூவுக்கும் - சசேரென்றும்:—

ஸ்தா ரிக்கு அடைக மென்றும் - யிப்படிப் பேரிட்டுவரும் - (கூரின்) கூரின்
 பேரின்படியே விலைபிட்டுக் கொள்ளவும் - என்பது:—

(8) உக்காலால் ஷெ அள (8 கலத்து) ரு ஷெ ரிச (14) ஆக கூ (9) வக்
 காலால் ஷெ ரு (50) ள ரு யெத்தனை யென்னில் - முன்யெட்டிம், நின்
 யெங் (8) கலமாகிய - அ (8) ருத் தன்னைமாற - கூச (8 \times 8 = 64)
 யென்று நிருத்தி - பின் - கூ (9)ம் - ரு (50) ள மாகிய (50) ரு - ம் மாற
 (9 \times 50 = 450) சாரு - பின் நடுவாகிய - ரிச (14) ம் பெருக்க
 (= 450 \times 14 = 6300) = கூசுநா - மிதை முன்னிருத்தினை பரிச (64)
 ருக் குடுக்க - ஈயவு = கூயிவரு - (= 6300 = 98 $\frac{1}{4}$); ஆதகால் -
 க ஷெ - கூயிவரு - (98 $\frac{1}{4}$) என்பது:—

(20) வீ— படியால் துலாம் - க (1) ரு ஷெ க ப-2 = (1 ப-2) ஆ. ௨௨ச
 (24) வீ—படியால் துலாம்-௨ (10) ரு. விலை பணம் பெத்தனை யென்றும்:—

ஐந்தனுதக விதம் ப மென்றறிந்து - முன் - உரி (20)று (ம்) க (1)ம் - மாற - உரி
என்று நிறுத்தி உாச (24)ம் - ரி (10)ம் மாற உாச - (24 × 10 = 240) -
இதுவுடனே - மஉ (1 × 10 + 2 = 12) ம் மாற - (2880) - உத ஆ அ
- யிதை முன்பிருத்தின - உரி (20) க்கிய சிப்பி - ஈசமிச = $(\frac{2880}{20}) =$
(144) ஆதலால் ஷி மிச ப - ச = $(\frac{144}{10}) = 14$ ப - 4) பென்பது.

இந்த வகையிலே - பாக்கு மிளகு - ஆவினந்து - பெருங்காயம் - ரசம் - சாதி
லிங்கம் - கோஷ்டம் - மலாக்காய் - பச்சை - வெட்டு ஆட்டுக்கால் முரியன்
-சந்தனம் - கொம்பிராக்கு-கற்பூம்-வசகான்-சூடன்-குங்குமம்-கோடுசுனை
சாம்பிறுணி - தேங்காய்ப்பளு - மறபெண்ணை - தேன் - நெய் - யிர்த்த வகை
யிலாட மென்று வந்தாலும் - குணப்பட்டை - சாதிலிங்கம் - வங்காளப்
பச்சை - யிப்படிநிருக்கப்பட்டதும்.

அளக்கப்பட்ட - நெல் - அரிசி - கோதுமை - பருப்பு - பயறு - எள்ளு
ஆமணக்கு - முத்து - யிர்த்தவகையில் அளக்கப்பட்டதும் - சூரியவட்டம் -
ஏகாங்கு சிவப்புத்தாவத்திப்பச்சை - தாவத்தியளகு - வன்னச்சுளிகை -
யிப்படிப்பட்டதுக்கெல்லாம் - ச (4)ம் - ஒண்ணுக்குப்பணமித்தனைபாக -
க (1) சமென்றி-ஒன்று முதற்கொண்டு பெருக்கிச் சொன்னும்-யிங்கனம்)
சொல்லப்பட்டதுக் கெல்லாம் முத்துகை விபரமென்றறிந்து சொல்லவு
மென்பது.

நவற்றினந்துக்கு (நவரத்தினந்துக்கு) விலைவாக்கிது (வைப்பது) சிகப்புக்கு
பணவிலையின் பெரிலே - வயித்துக்கு - பதிபச்சைஞ்சாடி-அதைத்தன்னில்
மாறிக் கண்டதுகையை து $(\frac{3}{1})$ லில் கணிந்துக்கண்டது சவ்வு பென்றும்,
வய்(வை)நிலையம் - கோமேதகம் - புஷ்பார்கம் நிலம் - இதுக்கெல்லாம் பண
விடை - பவளத்துக்குக் களஞ்சு-யிர்த்தப்படிக்கண மதியிலே (இர்த்தபடிக்கண
மதியிலே) வர்த்தகச் சேத்திங்கண்டு விலைவைக்கிது.

நாகமீனறுதுவே (நாகமென்றதுவே) - மாணிக்க மென்று பிறப்பிற்ற சிவப்புக்கு -
வஉகம் - பாங்கிப உகைல சொதகு (சுத்த) காந்தி - மாங்கிஷகாந்தி -
யிளமாணிக்கம்-பைக்கொராவை-கட்டையிதுகளிலே லட்சமி விரைந்திருந்தால்
- (குர்த்தப) பச்சை-பச்சையகிபலடி சக (சுத்து)-க்கு முளு இனம் முக்கால்
இனம் - பிக்காந்தி யிதுகளிலே - பழபது புதியது - நீலத்தில் ஒருகுர் நீலம்-
துரும்பிடிக்கிது முண்டு - வெள்ளைப்பாங்கம்-யிதுக்கு-க குத்தமாந்தவிந்து
நாகவிந்து - வியாத்தில-யகிம்-கப்புத் தெனவனனம். [(கப்புத்தேன்வன்னம்)
= (கொடபுத்தேன்வன்னம்)] தாமரைகிறம்-தினாயுண்டாயிருக்க வேணும்.—

வயிரத்தில் ககைபுஷ்பறாகம் - யிருகவிளவேணு சாம்பிலே கமபி விளுந்தால்
விரும்பும் பியென்றும் - பெளம் - பாந்தினாயுண்டாகியது - கோமேதக
மென்று சொல்லும் முத்துக்குத் தெனிவு - காந்தியிருகி விளுந்தால் ஆணி
முத்து யென்று பெறும் யிர்த்தகோபகாந்தி சாம்பிராணி பவளமென்று(ம்)
பேர் ஆக நவற்றினம் ஒன்பது யென்று சொல்லவும்:—

தீர்வை:—

லம் - ப - ரு ஷெ ச ப— ஆ நில நும் ப— சூ ரி - ரு தீர்வை - ப ரு
தீர்வை (தீர்வை) களிவு - ரி கீன் தள்ளி வ ச ப— ரி - ரு ப—
சுவ போக் ரீ — க்கு சளிவு தள்ளி - ஷெ. (நப — நன) ந பட
நன - யிதனை ரு ப — சூ ரி — உடனே பெருக்கி - ஷெ ரீசு ப —
(வச ரி) யென்பது உ.—

வேலி - க - ரு — அ — ஆ வேலி - ரு - ம் - உ - நிலத்துக்கு யெத்தனை
பண மென்றால்:—

யெட்டையும் - அயி - ஆக்கி - ரு - ம் உ — யுமாற - சாகு - யிதற்கு - சரி ப—
சு - யென்பது -

(மா-நில-) - ப - ரு ஷெ யிடு-ள. ஆ - யெது குழி ரு பெத்தனை யென்னில்:—

யெது ஐ, (குழி) யில்களிக்க-ளாருயி (= $750 = 12000 \times \frac{1}{16}$) யிதனை ய = $\frac{1}{16}$ ல்
களிக்க - சயிசு ஐயு - ($750 \times \frac{1}{16} = 46\frac{7}{8}$) யிதனை நிலாக்க உ சரிசு —
சூரி - யிதனை - யிடு-ள மாள - யிடு - உடனேமாற - ளாநடு - யிதனை கலப்
படுத்த - ளாநடு — ள (702 - ள) பச (ப 4) உ யென்பது:—

நெல்லு - ரு உறி - குத்த அரிசி - நூலி ஆ - அ-உறிக்காலால் ஷெ சுயி-ள (60 ள)
நெல்குத்த விட்டால் - கூஉ-க்காலால் அரிசியெத்தனை யென்றால்:— யிதன்
கண்ணளிவு.

கவி:—

கடைதலையெத்தான் பெருக்கிக் கண்ட றுகையை நிரூபித்தி
நடுமுன்னுமாத்நி நடத்துபட நல்லீர் - ஆயந்த
கணக்கும்படியே அன்புடனே நின்றனாகக்
கியந்திடாய்— ச்சொன்னேனியம்பு: (55)

முன் - ரு - யும் - பின்னை (சு) யும் - நய ($5 \times 6 = 30$) நிரூபித்த— 2 ஆவது
சொன்ன - ந-ம் ந - வது சொன்ன - அ - ய்மாற - உச - யிதனை ச(4)வது
சொன்ன - சுயி - ல்மாற - தசாசயி ($3 \times 8 \times 60 = 1440$) - யிதனை முன்
நிரூபித்த - நய - பெருக்கிய யிய்வு - சயிஅ - ஆதலால் - சயிஅ - ள
($\frac{3 \times 8 \times 60}{5 \times 6} = \frac{1440}{30} = 48$ - ள) அரிசி யென்பது:—

கவி:—

யிடைபுமுளமென்றே யென்றிந்து மட நல்லீர்
மாறுபடநல்லீர் நிரூபனே முன்னுதகணகம்
பெருக்கி முன்னின்ற தற்கிந்தது
யென்னே கணக்கென்றேயியம்
யென்பது:—

அய்ந்துகை விகற்பமென்றறிந்து கொள்வது.

(அவை வருமாறு):—

ரு (5) உக்காலால் ஐ ஹ (பதக்கு) அரிசி - ப உ உ (படி உஉ) ஆ அரிசி - யசு (16) ள சு (6) உக்காலால் ஐ யெத்தனை யென்னில்:—

(ங) வது சொன்ன (எ) ம். அஞ்சாவது சொன்ன - சு-ம் மாற - சயிஉ ($6 \times 7 = 42$) நிருத்தி (2) வது சொன்ன - யசு - ம் முன் - ரு - ல் மாற - அயி - ($16 \times 5 = 80$) - இதை ச - வது சொன்ன யசு-ல் மாற - ஊஅயி - இதை முன்னிருத்தின சயிஉ - ருக்குடுக்க யீய்வு நயிசவசுசு-உரி - இதை கலத்தில் கழிக்க - நய - ள - த - ப ரு உ (30 கலம் - தூணி 1, ப 5 உரி:—)

குறிப்பு:— மேலே சொன்ன - (ஊஅயி) என்பது - கணிதய்ப்படி - ஈஊஅயி ($80 \times 16 = 1280$) ஆகவேணும்—என்பதுணர்க— ஓர் எழுத்தின் லக்கம் - ஈ என்பது விட்டுப்போயிருக்கிறது:—

$$\left\{ \begin{array}{l} 16 \times 5 \times 16 \\ 6 \times 7 \end{array} = \frac{1280}{42} = 30\frac{1}{3} \right\} \text{என்பது:—}$$

ரு ஹ அரிசி-ந-உறி ஆ-அஉக் காலால் அரிசி - நயிஉள (32 கலம்) - த - ஹ (தூணி - பதக்கு) ஹ சுஉக் காலால் யெத்தனை யென்னில்:—

உ. ஆவது சொன்ன - ந (ம்) - அஞ்சாவது சொன்ன-சு- (ம்) மாற - (சயி) (இது தப்பு) \therefore (யிஅ), [முதலாவதும் மூனாவதுமான ரு-ம் - அ-ம் மாற] = (ரு \times அ = சயி); (நவேல் விடப்பட்ட தீவ்வள வாகுமென்பது குறிப்பிங்கு):—

இதுடனே - ச-ஆவது - நயிஉ-ள - எ = ? மீ (சு ம்) ஆன - நயிகஇ - யுமாற ஈஊசுய ($31\frac{1}{2} \times 40 = 1260$) யிதை முன்னிருத்தின-யிஅ-ரு கீய்ய யீய்வு = எயி-ள ($\frac{1260}{18} = 70$ -ள) என்பது:—

யசு - டிக்கோலால் மீ நிலம் - ப-ரு - () கடமை-சயி (பணம்) ஆ யிஉ - டிக் கோலால் - மீ நிலம் - ப-ரு - கடமை பணம் யெத்தனை யென்றால்:—

யசு - ரு - யிஉ யீய - யீய்வு-ஹ (முக்கா)-தன்னைமாற-இய - இதைக் கடமை-சயி-ல் மாற:—

$40 \times \frac{5}{8} = 22\frac{1}{2}$ ப—) = உயிஉஇ. ஆதலால்-ஐ- 2 — $2\frac{1}{2}$ உஇ -யென்பது:— எஉ க்காலால் - ஈ,ள - (100 - ள) - அஉ க்காலால் நெல் யெத்தனை யென்னில்:—

இதற்குச் சுறுக்குத்தானம்:—

எ. (ம). ஈ - (ம்) மாற - ஈா - ($7 \times 100 = 700$). இதை அ-உக்காலில் களிக்க- அயிஎ இ ($\frac{700}{8} = 87\frac{1}{2}$) ஆதலால் - அயிஎ - ள, த, ஹ-ச-உ ($87\frac{1}{2}$ ள = 87 ள - தூணி பதக்கு - 4உ)யென்பது:—

(யெ) டிக்கோலால் குழி-ள-ல் யா - டிக்கோலால் குழி தெத்தனை யென்னில்:—

இதுக்குச் சுறுக்குத்தானம்:—

பின்-யிசு-றா - யெ. றுக்கிய யிய்வு - னு = $(\frac{1^2}{16} = \frac{3}{4})$ முக்கால் - யிதைத் தன்னை
மாற - இய - (இதை) குழி யாகிய - றா - தூயில் - மாற - றுயிசுவ :—

இதற்கு வேறு வழிப்படியும்நிடை.

இனத்தை இனத்தால் பெருக்கு இனத்தால் வகு என்பதிற்படி நடத்த:—

கோல்களையே குழி செய்ய வந்ததால் பெருக்கி வகுக்க:—

நிலக்குழி 100ஐ $[(100) \times (\frac{1^2}{16})^2] = (100 \times \frac{1^4}{2^8})$

$[(100) \times (\frac{16 \times 9 = 144}{16 \times 16 = 256}) \times \therefore \frac{9}{16}]$

$(100 \times \frac{9}{16} = \frac{900}{16} = 56\frac{1}{4}) =$ குழி $56\frac{1}{4}$ (முன் போல்)

என்பது:—

யிப்படிச் செவ்வையாய் வந்தால் கருக்குத்தானம் பார்த்துச் சொல்லவும் -
செவ்வையாய் வருதே போனால் - பெருக்கிச் சொல்லவும்:—

யிசு - டிக்கோலால் குழி - சா - (ம்) கண்டதொரு கோலாலளக்க (குழி) றா-அளந்த
கோலுக்கடி பெத்தனை யென்னில்:—

யிதுக்குச் சுறுக்குத்தானம்:—

சா - ம் முதல் - உயி. றா - உயி - சா - ஆதலால்:—

உயி - றாம் - உயி -

(பின்பு) றா. யும் மூலப்படுத்த.

யி. றா - யி: றா, ஆதலால் - யி, றா - உயி. ஈயயிய்வு = உ = முன் - யிசு - ல்மாற
- ஈயெ:

[இதற்கும் முன் போல் த்றை றுசிக (வர்க்க) கணிதப்படிக்கு:—

இங்கு (கோல் வர்க்க) $= \frac{400}{1600} (16)^2 = 256 \times \frac{400}{1600} = 256 \times 4 = 1024.$

$\therefore 1024\text{ன்} = 32 \times 32 \therefore$ இதற்கு மூலம் = 32.

$\therefore 100$ குழியாக அளந்த கோல் நீளம் = 32 அடியென்பது:—

[குறிப்பு:— நிலக்குழி சொச்சத்தில் வந்தாலும் மேலே தனியாக என்னால்
காட்டப்பட்ட வழிகள், கோலுக்குஞ் சேர்ந்து கணிதத்தில் நன்றாக உபயோக
மாகும் - என்பதாம்]:—

செவ்வையாய் வந்தால் யிப்படிப் பார்க்கவும் - யில்லாத போனால் தானத்துப் படியே பார்த்துப் பெருக்கிச் சொல்லவும்:—

(ஸ்தானத்துப்படிப் பார்த்துச் சொல்லுமிவர்கள் வழி முன்னே விரிவாக விளக்கப் பட்டிருக்கிறது - ஆனபோதிலு மிப்படிப் பார்ப்பது மிக்கக் கடினமே யாகுமென்பதுணர்க) :—

வினா விளக்க(ங்கள்)ட்—

(ச)ல் பெருக்குவந்தால் (வ) வாயில் பார்க்கிறது— (1)

(அ)ல் பெருக்கு வந்தால் (ஓ) வாயில் பார்க்கிறது (2)

(யிசு)ல் ஷே (ய) ஷே (3)

(நயஉ)ல் பெருக்க வந்தால் (ய) வாயில் கனித்த துகையைப் பாதி செய்துச் சொல்லவும். (4)

(சுயிசு)ல் பெருக்கு வந்தால் (ய) வாயில் கனித்த துகையைக் கால்வாயில் கனித்துச் சொல்லவும் (5)

(நாயிஅ)ல் பெருக்கு வந்தால் (ய) வாயில் கனித்துக் கண்டதை (ஓ) வாயில் கனித்துச் சொல்லவும் (6)

(உாநுயிசு)ல் பெருக்கு வந்தால் (ய) வாயில் கனித்துத்திரும்ப (ய) வாயில் கனித்துச் சொல்லவும் (7)

யிடை வெளித்தானம்:—

(ரு) பெருக்கு வந்தால் - (சு) வாயில் கனித்துச் சொல்லவும். (8)

(ந) பெருக்கு வந்தால் (கீ) வாயில் கனித்துச் சொல்லவும் (9)

(உயி) பெருக்கு வந்தால் (ப) வாயில் கனித்துச் சொல்லவும் (10)

(சயி) பெருக்கு வந்தால் (சு) வாயில் கனித்துச் சொல்லவும் (11)

(அயி) பெருக்கு வந்தால் (அ) வாயில் கனித்துச் சொல்லவும் (12)

(நாசுயி) பெருக்கு வந்தால் (நி) வாயில் கனித்துச் சொல்லவும் (13)

(நாஉயி) பெருக்கு வந்தால் (வது = முந்திரி) வாயில் கனித்துச்சொல்லவும் (14)

மத்தும் வந்தனவெல்லாம் இப்படிப் பார்த்துச் சொல்லவும்:—

(இன்னும் சில விசேஷம்) ஷேக்குத் தோடர்ச்சி குறிப்புகளிங்கு:—

ச. ரு. வ 4 க்கு $(\frac{1}{4})$

அ. ரு. ஓ, 8 க்கு $(\frac{1}{8})$

யிசு. ரு. ய, 16 க்கு $(\frac{1}{16})$

நயஉ. ரு. கி, 32 க்கு $(\frac{1}{32})$

சுயிசு. ரு. உஷு, 64 க்கு $(\frac{1}{86} + \frac{1}{320}) = (\frac{1}{64})$

நாயிஅ. ரு. நிகுஇ, 128 க்கு $(\frac{1}{160} + \frac{1}{640}) = (\frac{1}{128})$

உாநுயிசு. ரு. வதுகீவ, 256 க்கு $(\frac{1}{320} + \frac{1}{1280}) = (\frac{1}{256})$

இப்படிப் பார்த்துக்கொள்ளவும் 512 க்கு $= (\frac{1}{640} + \frac{1}{5120}) = (1/512)$

ப — (பணம்) இ ஓ நெல்படி - நுஇஓ. ஆ ப — நுஇஓ ரு நெல்சொல்வது

[நடுவு நுஇஓ - யும், கடசி நுஇஓ - யும் மாற - நடுகஇஓவுத -
இது முதலாகிய(தை) - இஓ—பேருக்குக் குடுக்க யிய்வு - நடுஇஓ =]

(குறிப்பு:- இஓ = $\frac{5}{8}$. நுஇஓ = $5\frac{5}{8} = \frac{45}{8}$)

∴ $(\frac{45}{8} \times \frac{45}{8} \div \frac{5}{8} = \frac{2025}{64} \times \frac{8}{5} = \frac{405}{8} = 50\frac{5}{8})$ யென்பது.

ஸ் - டி - ரு - ஷெ - சல - ப — ஆ - டிடு ப — சூரவது-உரி ரு-யெத்தனை பென்
னில்:- டிடுநாரு- யும் - சலில் - மாற கூடு - ப — எஇ - யென்று நிருத்தி
கூள - சலில் மாற நடு-நடு யும் - ய — வாயில் களிக்க - கதாஓ - ஆதலால்
முன்னிருத்தின துக்கையுடனே கூட்ட - கூடு ப — கூவடு.

[குறிப்பு:- மேற் சொன்ன டிடு ப — சூரவது - என்பது டிடுநாரு-சூரவது -
என்றிருக்க வேணும். இவ்விதமிருந்தால் தான் கீழ் சொன்னவிடை - கூடு -
கூவடு ருச்சரி வருகின்றது:—

விவரணம்:-

$(40 \times 15\frac{15}{16} + \frac{3}{80} \times 40 + \frac{1}{160} \times 40 + \frac{1}{320} \times 40),$

$(\frac{3}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = \frac{3}{160}) (40) = (\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4})$ என்று கிருத்தி

$15\frac{15}{16} \times 40 = 631\frac{3}{8}.$

இங்கு 16 = 10, ∴ 12 = $7\frac{1}{2}$ ∴ 63 ப — $7\frac{1}{2}$.

இந்த 63 ப — $7\frac{1}{2}$ யுடன் முன்னிருத்தின $1\frac{3}{4}$ ப —வும் கூட்ட (63 ப — $7\frac{1}{2}$ +
ப — $1\frac{3}{4}$).

= 63 ப — $9\frac{3}{4}$ என்பது சரியான விடையாக வருகிறது கவனிக்கவும்.

ஆகையால் இங்கு - (டிடுநாரு-சூரவது) (சல) = (கூடு ப — கூவடு)

= $40 (15 + \frac{15}{16} + \frac{3}{80} + \frac{1}{160} + \frac{1}{320} = 15\frac{315}{640}),$

= $(40 \times 15 + \frac{315}{16} \times 40)$

= $(600) + (315) = 915$

இதை

10ல் வகுக்க $(915 \times \frac{1}{10})$

= 91 ப — $9\frac{3}{4}$ இதற்குத் திரிபுத நமித் வக்கப்படிக்கு - கூடு ப — கூவடு]
பென்பது:—

(வேறு):

சாண் சுத்தில் - டி மூல சீனத்தில் - மாம் - க ரு வில் ஷெ கூ — ஆ -

டு - சாண் சுத்தில் - டிடு - மூல சீனத்தில் மாம் - டிடு - ரு வில்யெத்தனை
பென்னில் :—

முதல் - ச - ந்தன்னால்வாற - யசு - இதை மூளம் - ய-ல் மாற - ஈசுய - யிதை
 நிருத்தி பின் - னு-ம் தன்னில் மாற உயடு - இதை மூளம் - யடு ல் மாற -
 ஈளையடு யிதை - ய - உடனே மாற - ஈசுளாடுய - இதை முன்னிருத்தின
 ஈசுய - றுக் குடுக்க யீய்வு - உயடுவாடு :--

$$= \left\{ \left(\frac{5 \times 5 \times 15 \times 10}{4 \times 4 \times 10} \right) = \left(\frac{3750}{160} \right) = \left(23 \frac{7}{16} \right) \right\},$$

இங்கு ஷெ $\frac{7}{16}$ ஐ 10ல் பெருக்க - $4\frac{3}{8} = \left(\frac{70}{16} = 4\frac{6}{16} \right) \times (23 \text{ ப } - 4\frac{3}{8})$ ஆதலால் ஷெ உயடு ப - சவடு என்பது :--

இம்பி (மி) ரு வகை :--

ஷு ரு ஷு - கீ ஷு ரு இம்பி - யிடு; இம்பி - ஷு ரு துட்பம் ஈடு - துட்பம் -
 ஷு - ரு அதி துட்பம் - எடு; அதிதுட்பம் ஷு ரு துட்பம் யடு - துட
 பம் ஷு ரு அதிதபம் உயடு அதிதபம் - ஷு - ரு - அற்பம் சடு -
 அற்பம் ஷு ரு அதற்பம் சடு; அதற்பம் ஷு ரு சாரம்-யக-ஆ கீள்தானம்
 யிர்தப்படி பார்க்கவும்

இதற்கு விவரணம் :--

(ஷு) முந்திரி என்பது $\frac{1}{320}$; இந்த முந்திரிக்கு முந்திரி கீழ் முந்திரி
 $= \left(\frac{1}{320} \times \frac{1}{320} \right) = \frac{1}{102400}$.

இப்படி வந்த இந்த கீழ் முந்திரிக்கு ($\frac{1}{102400}$) இம்பி $10\frac{1}{2}$ பத்தரை

இம்பி முந்திரிக்கு துட்பம் $3\frac{1}{2}$ (முன்றறை)

துட்பம் முந்திரிக்கு அதி துட்பம் $7\frac{1}{2}$ (ஏழறை).

அதிதுட்பம் முந்திரிக்கு துட்பம் 15 (பதினேந்து).

துட்பம் முந்திரிக்கு அதிதபம் $22\frac{1}{2}$ (இருபத்திரண்டறை).

அதிதபம் முந்திரிக்கு அற்பம் $4\frac{1}{2}$ (நாலறை)

அற்பமுந்திரிக்கு அதற்பம் 45 (நாற்பத்தைந்து)

அதற்ப முந்திரிக்கு சாரம் 11 (பதினொன்று).

அதற்கின் தானம் இந்தப் படிப்பார்க்கவும்.

இன்னும் விவரண மிங்கு :--

பகுப்பளவைக்கு :--

ஒன்று (1) க்கு முந்திரி (320).

ஒன்று (1) க்குக் கீழ் முந்திரி - (102400) இந்தக்

கீழ் முந்திரி ஒன்று (1) க்து :—

இப்பிமுந்திரிகள் = 3360.

நுட்ப முந்திரிகள் = $(3360 \times 1120) = 3763200$.

அதிநுட்ப முந்திரிகள் = $(3763200 \times 2400) = 9031680000$.

திடப்பமுந்திரிகள் = $(9031680000 \times 4800) = 43352064000000$.

அதிடப்பமுந்திரிகள் = $43352064000000 \times 7200$
= 312134860800000000.

அற்பமுந்திரிகள் = $(312134860800000000 \times 1440)$
= 449474199552000000000.

அதற்பமுந்திரிகள் = $(449474199552000000000 \times 14400)$
= 6472428473548800000000000.

ஸாரங்கள் = $\left\{ \begin{array}{l} 6472428473548800000000000 \times 11 \\ = (71196713209036800000000000) \end{array} \right\}$ ஆ புள்ளிகள் = 26

ஆகையாலிங்கு ஒன்றுக்குச் சாரங்கள் (1 ருச் சாரங்கள்)

= $(71196713209036800000000000 \times 102400) \therefore$

= 729054343260536832000000000000.

ஆகப் புள்ளிகளிகள் (ஆகஸ்த்தானகள்) = 31 ஆகும்.

ஆகக் கீள்தானம் யிந்தப்படிப் பார்க்கவும்.

ஸ்ரீ ராமத்துணை ஸ்ரீறு செய்யும் குருவே துணை.

—: கடவுள் துதி (வாழ்த்தல்):—

ஆக்கலால் பிரமனென்றும் காத்தலால் விஷ்ணு வென்றும்

அழித்தலா லீசனென்று மாகிய மூலப்பொருளே

அனுக்ஷணம் மனதில் நிற்பாய் அழிவிலாத் தானங்கொடுத்துச்

சுடுதியில் காற்றிடாய் நீ கடவுளே நின்பதங்கள்

நானென்ற வகமொழிந்தேன் கடுகவே ஆனந்தம் போற்றிப்

படிப்பவர் பார்ப்போர் கேழ்ப்போ ரனைவரும் வாழி வாழி.

ஈசன் துணை ஈசன் ரக்ஷிக்குக சுபம் சுபம் சுபம்

முற்றும்.

ஸ்ரீ :

பிழை திருத்தம் விபேட்டவை

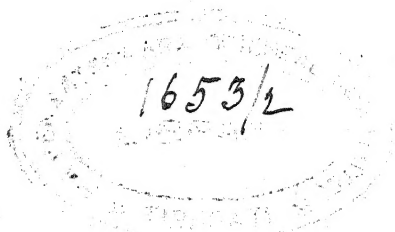
பக்கம்	வரி	தப்பு	சரி
11	24	நட - ல	ப
25	10	கூ	சூ
61	9	(87ம் 88ம்)	(59 ம்)

55ம் பக்கம் வரி 9ல் உள்ள—“ பரிதி” —(இதற்குமேல்)

“விபுத (33) நேத்ர (2) கஜாஹி (88) ஹுதாசந (3) த்ரிதச (33) வேத (4) ப (27) வாரண (8). பாஹுவ : (2)—நவநிகர்வ (9000000000000) மிதேவ்ருதி விஸ்தரே பரிதிமாநமிதம்—ஜகுர்ப்புதா:”

என்கிறபத்யத்தினால் —(சுற்றளவைச்)—என்று படிக்கவேண்டியதாகும்.

—:0:—



51.043 / ரி 363

PRINTED AT SOLAR WORKS,
12, THAMBU CHETTY STREET,
MADRAS-1.